Dr DUŠAN ADNAĐEVIĆ • Dr ZORAN KADELBURG

MATEMATIČKA ANALIZA

I

ČETVRTO IZDANJE

NAUKA
STUDENTSKI TRG
BEOGRAD, 1995.

Dr Dušan Adnađević, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu
Dr Zoran Kadelburg, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

MATEMATIČKA ANALIZA I
četvrto izdanje

Izdavači:
„NAUKA"
11000 Beograd, Bulevar revolucije 14/25
telefon (011) 42 18 34
STUDENTSKI TRG
11000 Beograd, Studentski Trg 6, tel. (011) 185-295

Recenzenti
Dr Branislav Mirković, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu
Dr Miodrag Mateljević, profesor Matematičkog fakulteta u Beogradu

Za izdavača
Nikola Dončev, glavni i odgovorni urednik
Šuković Leposava, direktor

Urednik
Marija Nenadović-Dončev

ISBN 86-7621-088-8
CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

517.13/.52(075.8)

АДНАЂЕВИЋ, Душан
Matematička analiza I / Dušan Adnađević, Zoran Kadelburg. — 4. izd. — Beograd : Nauka : Studentski trg, 1995 (Bor : Bakar). — 293 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 1000. — Registar. — Bibliografija: str. 292-293.
ISBN 86-7621-088-8

1. Каделбург, Зоран
a) Математичка анализа
ID=39734284

Tiraž 1000 primeraka

Štampa
Štamparsko-izdavačko preduzeće „Bakar"-Bor

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Ovaj udžbenik pisan je po važećem programu predmeta Matematička analiza I za studente Matematičkog fakulteta u Beogradu. Naravno, nadamo se da će moći da ga koriste i studenti drugih studijskih grupa i fakulteta na kojima je matematička analiza predmet izučavanja. Želja nam je bila da u udžbeniku nađu mesto oni sadržaji koji se mogu obraditi u jednom godišnjem kursu od 4 časa predavanja nedeljno. Izuzetak su zadaci koji se nalaze na kraju svake glave — neki od tih zadataka mogu se koristiti za vežbe (mada smo izbegavali standardne zadatke „za uvežbavanje predenog gradiva"), a neki dopunjavaju materijal dat u osnovnom tekstu i daju neke nove informacije.

Od dva moguća redosleda izlaganja — induktivnog i deduktivnog — opredelili smo se za onaj prvi, iz pedagoških razloga. Na taj način, najpre se u udžbeniku izlaže kompletna realna analiza funkcija jedne promenljive, da bi teorija metričkih prostora, sa primenama na funkcije više promenljivih došla na kraju.

Udžbenik je podeljen na glave, a ove na odeljke. Numeracija definicija, stavova, teorema, primera, slika i sl. je trostruka — sadrži broj glave i odeljka. Prilikom pozivanja, međutim, otpada broj glave (ako je to pozivanje u okviru iste glave), kao i odeljka (ako se pozivanje vrši u okviru nekog odeljka). Završetak dokaza stava (teoreme) označava se sa ■, a završetak primera sa ▲.

Recenzenti ovog udžbenika, dr Branislav Mirković i dr Miodrag Mateljević, učinili su veliki napor, pregledajući rukopis i dajući korisne primedbe i sugestije. Prijatna nam je dužnost da im se ovom prilikom zahvalimo.

Beograd, novembra 1988. *Autori*

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

U drugom izdanju izvršene su ispravke uočenih propusta. Manje dopune učinjene su u vezi sa pripremom udžbenika Matematička analiza II.

Beograd, septembra 1990. *Autori*

SADRŽAJ

1. UVOD . . . 9
1.1 Skupovi . . . 9
1.2 Relacije . . . 11
1.3 Funkcije . . . 13
Zadaci . . . 18

2. REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI . . . 21
2.1 Aksiome realnih brojeva . . . 21
2.2 Posledice algebarskih aksioma . . . 23
2.3 Neki važniji podskupovi skupa realnih brojeva . . . 25
2.4 Posledice aksiome neprekidnosti . . . 29
2.5 Neke interpretacije sistema aksioma realnih brojeva . . . 32
2.6 Prošireni skup realnih brojeva . . . 35
2.7 Tri važne leme . . . 36
2.8 Kardinalni brojevi. Prebrojivi i neprebrojivi skupovi . . . 38
2.9 Kompleksni brojevi . . . 42
Zadaci . . . 45

3. NIZOVI . . . 48
3.1 Limes niza. Osobine . . . 48
3.2 Podnizovi. Tačke nagomilavanja. Gornji i donji limes . . . 52
3.3 Košijev princip konvergencije . . . 56
3.4 Monotoni nizovi. Broj e . . . 58
Zadaci . . . 60

4. REALNE FUNKCIJE REALNE PROMENLJIVE . . . 63
4.1 Pojam i osobine . . . 63
4.2 Granična vrednost. Osobine . . . 65
4.3 Eksponencijalna, logaritamska i stepena funkcija . . . 70
4.4 Trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije . . . 74
4.5 Košijev princip egzistencije limesa . . . 79
4.6 Granična vrednost složene funkcije . . . 80
4.7 Granična vrednost monotone funkcije . . . 83
4.8 Asimptotske oznake o, O, $\sim$ i njihove osobine . . . 84
Zadaci . . . 88

5. NEPREKIDNOST . . . 91
5.1 Neprekidnost i tačke prekida . . . 91
5.2 Lokalna svojstva neprekidnih funkcija . . . 95
5.3 Globalna svojstva neprekidnih funkcija . . . 96
5.4 Ravnomerna neprekidnost . . . 99
5.5 Neprekidnost i monotonost. Neprekidnost inverzne funkcije . . . 103
5.6 Neprekidnost elementarnih funkcija . . . 106
Zadaci . . . 106

6. DIFERENCIJALNI RAČUN . . . 108
6.1 Izvod. Geometrijska i mehanička interpretacija . . . 108
6.2 Pravila diferenciranja . . . 113
6.3 Logaritamski izvod. Levi i desni izvod. Beskonačan izvod . . . 121
6.4 Diferencijal funkcije . . . 123
6.5 Viši izvodi i diferencijali . . . 125
6.6 Osnovne teoreme diferencijalnog računa . . . 129
6.7 Tejlorova formula . . . 138
6.8 Ispitivanje funkcija . . . 144
Zadaci . . . 156

7. NEODREĐENI INTEGRAL . . . 159
7.1 Primitivna funkcija i neodređeni integral . . . 159
7.2 Smena promenljive. Parcijalna integracija . . . 162
7.3 Neka svojstva racionalnih funkcija . . . 165
7.4 Integracija racionalnih funkcija . . . 169
7.5 Integracija nekih iracionalnih funkcija . . . 171
7.6 Neki integrali koji se ne izražavaju pomoću elementarnih funkcija . . . 173
Zadaci . . . 175

8. ODREĐENI INTEGRAL . . . 176
8.1 Pojam određenog integrala . . . 176
8.2 Svojstva integrala . . . 188
8.3 Veza između određenog integrala i izvoda . . . 194
8.4 Parcijalna integracija. Smena promenljive . . . 197
8.5 Primene integrala . . . 203
8.6 Nesvojstveni integral . . . 215
Zadaci . . . 223

9. METRIČKI PROSTORI. FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH . . . 226
9.1 Definicija, primeri i osnovne osobine . . . 226
9.2 Konvergencija . . . 234
9.3 Kompletnost . . . 239
9.4 Neprekidnost . . . 245
9.5 Kompaktnost . . . 248
9.6 Koneksnost . . . 252
Zadaci . . . 255

10. REDOVI . . . 260
10.1 Pojam i svojstva brojnog reda . . . 260
10.2 Redovi s pozitivnim članovima . . . 263
10.3 Redovi s proizvoljnim članovima . . . 270
10.4 Redovi vektora . . . 276
10.5 Beskonačni proizvodi . . . 280
Zadaci . . . 283

Indeks pojmova . . . 286
Literatura . . . 292

1. UVOD

Ova glava ima uvodni karakter i cilj joj je da, bez ulaženja u detalje i ne pretendujući na opštost izlaganja, precizira osnovne matematičke oznake i termine koji će biti korišćeni u ovoj knjizi.

1.1. SKUPOVI

Pojam *skupa* se obično ne definiše, već se uzima kao osnovni, a često se umesto tog termina koriste razni sinonimi, kao što su, na primer, *mnoštvo, familija, kolekcija* i sl. U ovoj knjizi nećemo se baviti aksiomatskim zasnivanjem teorije skupova, već ćemo se zadržati na nivou tzv. *naivne teorije skupova*.

Za označavanje skupova koristimo najčešće velika slova latinice A, B, ... Ako je neki skup konačan ili prebrojivo beskonačan (tačnu definiciju tog pojma v. u odeljku 2.8), pa se njegovi elementi mogu nabrojati, koristimo se zapisom

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad \text{odnosno} \qquad A = \{x_1, x_2, \ldots\};$$

takođe, elemente nekog skupa možemo opisati ako koristimo neko svojstvo $P(x)$ koje oni (i samo oni) zadovoljavaju:

$$A = \{\, x \mid P(x) \,\}.$$

Dakle, skup je određen svojim elementima; pripadnost elementa x skupu A označava se sa $x \in A$, a nepripadnost sa $x \notin A$.

Između skupova uvode se dve osnovne relacije — jednakost i inkluzija:

$$A = B \iff (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B),$$
$$A \subset B \iff (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Neposredno iz ovih definicija je jasno da je

$$A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A).$$

Posebno izdvajamo *prazan skup*, koji označavamo sa $\emptyset$ i možemo definisati, na primer, pomoću $\emptyset = \{\, x \mid x \neq x \,\}$. Taj skup ima osobinu da je $\emptyset \subset A$ za bilo koji skup A. Takođe, ako su u okviru neke teorije svi skupovi sa kojima operišemo podskupovi nekog fiksiranog skupa, taj skup nazivaćemo ***univerzalnim*** i označavaćemo najčešće sa U. Takav skup znači ima osobinu da je $A \subset U$ za sve skupove A sa kojima operišemo u datom problemu. (Pomenimo da nije ispravno koristiti termin „skup svih skupova" — on može dovesti do neželjenih paradoksa.) Na primer, često ćemo se baviti raznim podskupovima skupa $\mathbf{R}$ realnih brojeva, koji u tom slučaju može da posluži kao univerzalni skup.

Sa skupovima se mogu izvoditi razne operacije. Dajemo definicije nekoliko osnovnih:

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \,\},$$
$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \in B \,\},$$
$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\},$$
$$\complement A = U \setminus A = \{\, x \in U \mid x \notin A \,\},$$

ako je fiksiran univerzalan skup U. Pretpostavljaćemo da su osnovne osobine ovih operacija poznate čitaocu. Evo spiska tih osobina:

$A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (zakoni idempotencije);
$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (zakoni komutacije);
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (zakoni asocijacije);
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (zakoni distribucije);
$A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ (zakoni apsorpcije);
$A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$;
$A \cup \complement A = U$, $A \cap \complement A = \emptyset$;
$\complement\emptyset = U$, $\complement U = \emptyset$, $\complement\complement A = A$;
$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$, $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ (De Morganova* pravila).

Ilustracije radi dokažimo prvo od De Morganovih pravila. Za svaki element x važi sledeći niz ekvivalencija:

$$x \in \complement(A \cup B) \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \wedge x \notin B$$
$$\iff x \in \complement A \wedge x \in \complement B \iff x \in \complement A \cap \complement B,$$

što po definiciji znači da je $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

Par elemenata a, b kod koga se zna koja mu je prva ***komponenta*** (*koordinata, projekcija*), a koja druga, naziva se *uređenim parom* i označava (a, b). (Jedna od mogućih preciznijih definicija uređenog para je $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.) Dakle, po definiciji je

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d.$$

* A. de Morgan (1806–1871), škotski matematičar

Ako su A i B proizvoljni skupovi, skup svih uređenih parova čija je prva komponenta iz A, a druga iz B naziva se *Dekartovim* proizvodom* skupova A i B i označava

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}.$$

Neke osobine Dekartovih proizvoda date su u zadacima. Najčešća situacija u kojoj će se kod nas pojavljivati Dekartovi proizvodi je kada budemo posmatrali skupove uređenih parova realnih brojeva — na primer,

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbf{R} \}$$

je poznata Dekartova ravan;

$$[a,b] \times [c,d] = \{ (x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d] \}$$

je pravougaonik u toj ravni čije su projekcije na koordinatne ose redom segmenti $[a,b]$, $[c,d]$.

Slično se može definisati i Dekartov proizvod više skupova, na primer

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \};$$

specijalno, nas će interesovati skup

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, \ldots, n \}.$$

Pod *partitivnim skupom* nekog skupa A podrazumevaćemo skup svih njegovih podskupova:

$$\mathcal{P}A = \{ X \mid X \subset A \}.$$

1.2. RELACIJE

Definicija 1.2.1
Neka su X i Y skupovi i $\rho \subset X \times Y$. Tada kažemo da je ρ *(binarna) relacija iz X u Y*. Ako je $X = Y$, kažemo da je ρ *(binarna) relacija na skupu X*. Umesto $(x,y) \in \rho$ koristimo oznaku $x \rho y$.

Nas će interesovati relacije koje imaju posebna svojstva:

Definicija 1.2.2
Za relaciju ρ na skupu X kažemo da je *relacija ekvivalencije* ako zadovoljava sledeća svojstva:
1° refleksivnost: $(\forall x \in X)\, x \rho x$;
2° simetričnost: $(\forall x, y \in X)(x \rho y \Rightarrow y \rho x)$;
3° tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in X)(x \rho y,\ y \rho z \Rightarrow x \rho z)$.

* R. Descartes (Cartesius) (1596–1650), francuski filozof i matematičar

Primeri 1.2.1
1° Relacija jednakosti na bilo kom skupu je relacija ekvivalencije.
2° Relacija paralelnosti u skupu pravih jedne ravni je relacija ekvivalencije.
3° Relacija sličnosti u skupu trouglova je relacija ekvivalencije. ▲

Ako je na jednom skupu X data relacija ekvivalencije, tada se taj skup može na određeni način podeliti na podskupove (*klase ekvivalencije*). Naime, važi

Stav 1.2.1
Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu X. Tada je jednoznačno određena podela skupa X na podskupove A_i tako da važi:
1° $(\forall i) A_i \neq \emptyset$;
2° $(\forall x \in X)(\exists i) x \in A_i$;
3° $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$;
4° $x, y \in A_i \Leftrightarrow x \rho y$.

Dokaz.
Klase A_x, $x \in X$, definišimo na sledeći način: $A_x = \{ y \in X \mid x \rho y \}$. Tada svojstva 1° i 2° slede iz refleksivnosti relacije ρ (jer $x \in A_x$ za svako x). Pretpostavimo da je $A_x \cap A_y \neq \emptyset$. Tada postoji $z \in X$, tako da je $z \in A_x$ i $z \in A_y$, odakle se pomoću simetrije i tranzitivnosti lako dobija da je $x \rho y$ i $y \rho x$, drugim rečima $A_x \subset A_y$ i $A_y \subset A_x$. Na taj način, ako dve klase nisu disjunktne, one se poklapaju, čime je dokazano 3°. Svojstvo 4° je na drugi način iskazana definicija klase A_x. ■

Važi i obrat ovog tvrđenja (v. zadatak 9). Skup svih klasa ekvivalencije zove se *količnički skup* i označava se sa X/ρ. U primeru 1.1° on se može poistovetiti sa samim skupom na kome je jednakost definisana, u primeru 1.2° to je skup svih pravaca u ravni, a u primeru 1.3° to je skup klasa koje čine svi međusobno slični trouglovi.

Definicija 1.2.3
Za relaciju ρ na skupu X kažemo da je *relacija poretka* (ili *uređenja*) ako važi:
1° ρ je refleksivna;
2° ρ je antisimetrična, tj. $(\forall x, y \in X)(x \rho y,\ y \rho x \Rightarrow x = y)$;
3° ρ je tranzitivna.
Za skup X kažemo da je *uređen* relacijom ρ. Ako ρ zadovoljava još i uslov
4° $(\forall x, y \in X)(x \rho y \vee y \rho x)$,
kažemo da je ρ relacija *potpunog (totalnog) poretka*.

Primeri 1.2.2
1° Relacija $\leqslant$ je relacija potpunog poretka na skupu racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$.
2° Ako je X proizvoljan skup i $\mathcal{P}X$ njegov partitivni skup, relacija inkluzije $\subset$ je relacija poretka na $\mathcal{P}X$ koji nije totalni (izuzev ako je skup X prazan ili jednočlan).
3° U skupu prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ relacija deljivosti $|$ je relacija poretka koji nije totalni. (Zašto $|$ nije relacija poretka u skupu celih brojeva $\mathbf{Z}$?) ▲

Neka je X proizvoljan skup, $\leqslant$ relacija poretka u njemu i $A \subset X$. Za element $x \in X$ kažemo da je *majoranta* skupa A ako važi $a \leqslant x$ za svako $a \in A$. Za skup

A koji ima bar jednu majorantu kažemo da je *ograničen odozgo*. Ako postoji majoranta skupa A koja pripada tom skupu (očigledno je da je ona tada jednoznačno određena), ona se naziva *maksimumom* skupa A. Dakle:

$$x = \max A \iff (x \in A \quad \text{i} \quad (\forall a \in A) a \leqslant x).$$

Na sličan način definišu se pojmovi *minorante*, *minimuma* i *odozdo ograničenog* skupa.

Posmatrajmo skup svih majoranti datog skupa A. Njegov minimum (ako postoji) naziva se *supremumom* skupa A. Dakle, supremum skupa A jednoznačno je određen (ako postoji) sledećim uslovima:

$$x = \sup A \iff \begin{cases} 1^\circ & (\forall a \in A) a \leqslant x, \\ 2^\circ & (\forall a \in A) a \leqslant y \implies x \leqslant y. \end{cases}$$

Jasno je da je maksimum skupa A (ako postoji) ujedno i njegov supremum, dok obrnuto ne mora da važi.

Slično se definiše pojam *infimuma* $\inf A$.

PRIMERI 1.2.3

1° Za poluzatvoren interval $I = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x < 1 \}$ u skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je $\min I = \inf I = 0$, $\sup I = 1$, dok $\max I$ ne postoji jer $\sup I \notin I$. Inače, sve majorante skupa I u $\mathbb{Q}$ su racionalni brojevi $x \geqslant 1$.

2° U skupu $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ skup $\mathbb{Q}^- = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \}$ ograničen je odozgo, ali nema supremuma.

3° Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi skupa X, tj. $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{P}X$. U odnosu na relaciju inkluzije je

$$\sup \mathcal{A} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad \inf \mathcal{A} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Specijalno, svaka takva familija $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}X$ je *ograničena* (tj. ograničena i odozgo i odozdo) i ima i supremum i infimum.

4° Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva, uređen relacijom deljivosti $\mid$ i neka je $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ proizvoljan konačan podskup od $\mathbb{N}$. Tada je

$$\sup A = \text{NZS}\{n_1, n_2 \ldots, n_k\}, \qquad \inf A = \text{NZD}\{n_1, n_2 \ldots, n_k\}. \quad \blacktriangle$$

1.3. FUNKCIJE

Neka su X i Y skupovi. Kažemo da je data *funkcija* koja preslikava skup X u skup Y ako je po nekom pravilu svakom elementu skupa X pridružen neki, potpuno određeni, element skupa Y. Umesto termina „funkcija" koristićemo i sinonime *preslikavanje*, *transformacija* (obično u slučaju da je $X = Y$), *operator* (naročito kad skupovi X i Y nisu skupovi brojeva), *funkcional* (obično kad je Y skup brojeva, a X to nije) i sl. Gornja opisna definicija funkcije može se precizirati na sledeći način:

DEFINICIJA 1.3.1 (FUNKCIJA)

Neka su X i Y skupovi i f relacija iz X u Y (tj. $f \subset X \times Y$). Za relaciju f kažemo da je *funkcija iz X u Y* i pišemo $f : X \to Y$ ako

1° $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x, y) \in f$;

2° $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2$.

Skup X se zove *domen* (ili *oblast definisanosti*), a skup Y se zove *kodomen* funkcije f. Ako je $(x, y) \in f$, pišemo $y = f(x)$. Elementi $x \in X$ se zovu *originali*, a elementi $y = f(x)$ *slike*.

Jasno je da uslovom 1° ove definicije zahtevamo da je funkcija f definisana *na celom* skupu X, tj. da svaki $x \in X$ može biti original za funkciju f; uslov 2° govori da je f *jednoznačna*, tj. da jednom originalu može odgovarati samo jedna slika. Jednim uslovom to se može iskazati na sledeći način:

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)\, y = f(x),$$

gde je korišćena oznaka $\exists!$ u smislu „postoji tačno jedan".

Funkcija, tj. pravilo pridruživanja, između skupova X i Y može biti zadata na razne načine. Pomenimo neke od njih.

U ovoj knjizi najviše ćemo govoriti o realnim funkcijama realne promenljive (v. glavu 4 i dalje). Kod njih je najinteresantnije zadavanje pomoću nekog *analitičkog izraza* $y = f(x)$, na primer, $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $y = \ln\sqrt{1 + e^x}$, $y = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Kada je jasno koji su domen i kodomen takve funkcije (konvenciju o domenu i kodomenu funkcija zadatih analitičkim izrazima dajemo na početku odeljka 4.1), govorićemo jednostavno o funkciji $x \mapsto f(x)$ (ističući time original i njegovu sliku), ili čak samo o funkciji $f(x)$ (mada je, strogo govoreći, $f(x)$ element skupa Y — dakle, na primer, broj — a ne funkcija). Inače, u takvom zadavanju funkcije, x je oznaka za tzv. *argument* ili *nezavisno promenljivu*, a y za *zavisno promenljivu*.

Tablični način zadavanja funkcije pogodan je kad su skupovi X i Y konačni.

Grafički način kod realnih funkcija koristićemo samo kao pomoćno sredstvo, ilustraciju, a ne kao način preciznog zadavanja funkcije. Inače, pomenimo da, u skladu sa našom definicijom, *grafik* funkcije f,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \in f\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\},$$

ustvari nije ništa drugo već sama funkcija f.

Činjenica da je funkcija $f : X \to Y$ zadata samo ako su prethodno zadati njeni domen X i kodomen Y dolazi do izražaja kada želimo da proverimo jednakost dveju funkcija. Naime, funkcije $f_1 : X_1 \to Y_1$ i $f_2 : X_2 \to Y_2$ su jednake ako (i samo ako) je $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ i $(\forall x \in X_1) f_1(x) = f_2(x)$. Promena domena ili kodomena može bitno promeniti osobine funkcije (v. dalje primere 1). Ako je samo $X_1 \subset X_2$, $Y_1 \subset Y_2$ i $(\forall x \in X_1) f_1(x) = f_2(x)$, kažemo da je f_1 ***suženje (restrikcija)*** funkcije f_2, a da je f_2 ***produženje (ekstenzija)*** funkcije f_1. Ako je pri tom $Y_1 = Y_2$, pišemo $f_1 = f_2|X_1$.

Ponovimo još jednom da kada imamo funkciju $f : X \to Y$ onda *svakom* elementu skupa X pridružujemo *tačno jedan* element skupa Y. U opštem slučaju ne

zahtevamo obrnuto — da *svaki* element skupa Y bude slika nekog elementa skupa X, niti da on bude slika *samo jednog* takvog elementa. Funkcijama koje imaju neko od ta dva dodatna svojstva dajemo posebno ime.

DEFINICIJA 1.3.2

Za funkciju $f: X \to Y$ kažemo da je

1° *injektivna (injekcija)* ako

$x_1, x_2 \in X$ i $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$, tj. ako

$x_1, x_2 \in X$ i $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$;

2° *surjektivna (surjekcija)* ako

$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, y = f(x)$;

3° *bijektivna (bijekcija)* ako je injektivna i surjektivna.

PRIMERI 1.3.1

1° Funkcija $f_1: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, data sa $f(x) = |x|$ nije ni injektivna (jer, na primer, $f(-1) = f(1)$) ni surjektivna (jer, na primer, $f(x) \neq -1$ za sve $x \in \mathbb{Q}$).

2° Neka je $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ skup svih nenegativnih racionalnih brojeva. Funkcija $f_2: \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}$, takođe data sa $f(x) = |x|$, jeste injektivna, ali nije surjektivna.

3° Isti analitički izraz $f_3(x) = |x|$ definiše funkciju $f_3: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ koja je surjektivna, ali nije injektivna.

4° Najzad, $x \mapsto |x|$, shvaćeno kao funkcija $f_4: \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, jeste bijekcija. ▲

U slučaju da je neka funkcija $f: X \to Y$ bijekcija, tada (i samo tada) može da se definiše nova funkcija — koju ćemo označavati sa f^{-1} i zvati *inverznom funkcijom* funkcije f — koja će svakom elementu $y \in Y$ pridruživati onaj (potpuno određeni) element skupa X koji se u to y preslikava funkcijom f. Dakle, po definiciji je

$$(\forall x \in X) f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{i} \quad (\forall y \in Y) f(f^{-1}(y)) = y,$$

naravno, samo ako je f bijekcija (tada je takođe i f^{-1} bijekcija).

Do sada smo govorili o slikama *elemenata* skupova X i Y; ima smisla govoriti i o slikama njihovih *podskupova*. Naime, ako je $A \subset X$, definišemo *sliku skupa* A *funkcijom* $f: X \to Y$, u oznaci $f(A)$, kao skup svih onih elemenata skupa Y koji su slika nekih elemenata skupa A; dakle,

$$f(A) = \{ y \in Y \mid (\exists x \in A) y = f(x) \} = \{ f(x) \mid x \in A \}.$$

Ako je $B \subset Y$, definišemo *inverznu sliku skupa* B *funkcijom* f, u oznaci $f^{-1}(B)$, kao skup onih elemenata skupa X koji se funkcijom f preslikavaju u skup B; dakle,

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}.$$

Koristeći pojam slike skupa lako iskazujemo uslov surjektivnosti funkcije $f: X \to Y$ — on glasi $f(X) = Y$.

Naglašavamo da je pojam inverzne slike definisan nezavisno od toga da li funkcija f ima inverznu funkciju f^{-1} ili ne (mada se koristi isti simbol). Naravno, ako je funkcija f^{-1} definisana, oznaka $f^{-1}(B)$ ima isti smisao, bilo da se shvati kao slika skupa B funkcijom f^{-1}, bilo kao inverzna slika tog skupa funkcijom f.

Neke od osobina slike i inverzne slike navešćemo u zadacima 16–19, a ovde dokažimo sledeće njihovo svojstvo.

STAV 1.3.1

Neka je $f: X \to Y$. Tada:

1° za svaki podskup A skupa X važi $A \subset f^{-1}(f(A))$; funkcija f je injektivna ako i samo ako za svaki $A \subset X$ važi $A = f^{-1}(f(A))$.

2° za svaki podskup B skupa Y važi $f(f^{-1}(B)) \subset B$; funkcija f je surjektivna ako i samo ako za svaki $B \subset Y$ važi $f(f^{-1}(B)) = B$.

Dokaz.

1° Neka je $A \subset X$ i $x \in A$. Tada je $f(x) \in f(A)$, te se dakle x preslikava funkcijom f u skup $f(A)$, što znači da je $x \in f^{-1}(f(A))$. Time je inkluzija $A \subset f^{-1}(f(A))$ dokazana.

Pretpostavimo da je f injektivna funkcija i $A \subset X$. Treba da dokažemo inkluziju $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Neka je $x \in f^{-1}(f(A))$; to znači da je $f(x) \in f(A)$, tj. postoji neki element $x' \in A$, takav da je $f(x) = f(x')$. Zbog injektivnosti sledi da je $x = x'$, tj. $x \in A$, čime je pomenuta inkluzija dokazana.

Obrnuto, pretpostavimo da funkcija $f: X \to Y$ ima osobinu da je $(\forall A \subset X) A = f^{-1}(f(A))$ i, suprotno tvrđenju, da f nije injektivna. Tada postoje dva razna elementa x_1, x_2 skupa X, takva da je $f(x_1) = f(x_2) = y$. Označimo $A = \{x_1\}$. Tada je $f(A) = \{y\}$, a $f^{-1}(f(A))$ sadrži bar dva elementa x_1 i x_2, te ne može biti jednak skupu A. Kontradikcija.

2° se dokazuje takođe jednostavno. ■

DEFINICIJA 1.3.3

Neka su X, Y i Z skupovi i $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Funkcija $h: X \to Z$, definisana sa $h(x) = g(f(x))$, naziva se *složenom funkcijom* ili *kompozicijom* funkcija f i g i označava se sa $h = g \circ f$.

Neposredno se proverava da je kompozicija funkcija asocijativna, tj. da važi

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

naravno pod uslovom da sve navedene kompozicije imaju smisla (tj. da je $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to U$). To nam omogućava da ne pišemo zagrade u slučaju da treba da pišemo kompoziciju za više od dve funkcije. Naravno, kompozicija funkcija nije komutativna jer funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$ ne moraju biti istovremeno definisane, a čak i ako to one jesu, ne mora biti $f \circ g = g \circ f$. Prepuštamo čitaocu da konstruiše odgovarajuće primere.

STAV 1.3.2

Neka je $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Tada:

1° ako su f i g injektivne (surjektivne) i $g \circ f$ je takva;

2° ako je $g \circ f$ injektivna i f je takva;

3° ako je $g \circ f$ surjektivna i g je takva.

Dokaz.

1° Neka su f i g injekcije i x_1, x_2 takvi elementi skupa X da je $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Iz $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, zbog injektivnosti funkcije g sledi da je $f(x_1) = f(x_2)$, a odatle, zbog injektivnosti funkcije f, da je $x_1 = x_2$. Zato je i $g \circ f$ injekcija.

Ako su f i g surjekcije, onda je

$$g\circ f(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z,$$

pa je i $g\circ f$ surjekcija.

2° Ako funkcija f ne bi bila injektivna, postojali bi međusobno različiti elementi x_1, x_2 skupa X za koje je $f(x_1) = f(x_2)$. Tada bi bilo i $g\circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g\circ f(x_2)$, tj. ni funkcija $g\circ f$ ne bi bila injektivna.

3° Ako funkcija g nije surjektivna, postoji element $z \in Z$, takav da $z \notin g(Y)$. Tada svakako taj element ne pripada (eventualno manjem) skupu $g\circ f(X) = g(f(X))$, čime je dokazano da funkcija $g\circ f$ nije surjektivna. ■

Jedan od najjednostavnijih primera funkcija su *identičke funkcije*. Za proizvoljan skup X postoji takva funkcija — označavaćemo je sa $i_X : X \to X$ — definisana sa $i_X(x) = x$ za svako $x \in X$. Lako se dokazuje sledeće njihovo svojstvo.

STAV 1.3.3

1° Neka je i_Y identička funkcija skupa Y, i $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ proizvoljne funkcije. Tada je

$$i_Y\circ f = f \quad i \quad g\circ i_Y = g.$$

2° Funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ su uzajamno inverzne (tj. $g = f^{-1}$ i $f = g^{-1}$) ako i samo ako je $g\circ f = i_X$ i $f\circ g = i_Y$. ■

Na kraju, razmotrimo malo detaljnije sledeću situaciju.

Neka su I i X proizvoljni skupovi i $\mathcal{A} : I \to \mathcal{P}X$ proizvoljna funkcija koja elementima $i \in I$ dodeljuje podskupove $\mathcal{A}(i) = A_i$ skupa X. Tada kažemo da je data *familija* ili *kolekcija* podskupova skupa X; za skup I kažemo da je *skup indeksa*, a za familiju $\mathcal{A}$ da je *indeksirana (numerisana)* skupom I. Poznati specijalni slučajevi su kada je $I = \{1, 2, \dots, n\}$ — tada je $\mathcal{A}$ prosto konačan niz skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$ — i kada je $I = \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, dakle skup prirodnih brojeva — tada je $\mathcal{A}$ beskonačan niz skupova $A_1, A_2, \dots$.

Na slučaj proizvoljne familije podskupova nekog skupa mogu se preneti definicije osnovnih skupovnih operacija, unije i preseka. Tako je, po definiciji, $\bigcup\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} A_i$ skup svih onih elemenata $x \in X$ za koje postoji $i \in I$, takav da je $x \in A_i$:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff (\exists i \in I) x \in A_i;$$

slično, $\bigcap\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} A_i$ je skup svih onih elemenata $x \in X$ koji pripadaju skupu A_i za svako $i \in I$:

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff (\forall i \in I) x \in A_i.$$

Lako se proverava da se osnovne osobine ovih operacija navedene u odeljku 1.1

prenose na ovu opštiju situaciju. Na primer,

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B),$$

$$\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B),$$

$$\mathbb{C}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \mathbb{C}A_i,$$

$$\mathbb{C}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \mathbb{C}A_i.$$

Evo, ponovo ilustracije radi, dokaza jednog od De Morganovih pravila. Važi sledeći niz ekvivalencija

$$x \in \mathbb{C}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \iff \neg\Big(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\Big) \iff \neg(\forall i \in I) x \in A_i$$

$$\iff (\exists i \in I) x \notin A_i \iff (\exists i \in I) x \in \mathbb{C}A_i \iff x \in \bigcup_{i\in I} \mathbb{C}A_i,$$

što dokazuje poslednju od navedene četiri osobine.

ZADACI

1. *Simetrična razlika* skupova A i B definiše se kao $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dokazati sledeće osobine te operacije: 1° $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; 2° $A \triangle A = \emptyset$; 3° $A \triangle B = B \triangle A$; 4° $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$; 5° $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$; 6° $\mathbb{C}A \triangle \mathbb{C}B = A \triangle B$; 7° $A \triangle B = A \cup B \iff A \cap B = \emptyset$.

2. Dokazati da je: 1° $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$; 2° $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}A \cup \mathcal{P}B$. Primerom pokazati da inkluzija u 2° može biti stroga.

3. Ako skup A ima n elemenata, dokazati da skup $\mathcal{P}A$ ima 2^n elemenata.

4. Dokazati: 1° $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; 2° $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; 3° $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$; 4° $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

5. Koliko ima binarnih relacija na skupu od n elemenata?

6. Neka je $m > 1$ prirodan broj. Relacija *kongruencija po modulu* m, definisana na skupu celih brojeva $\mathbf{Z}$ sa

$$x \equiv y \pmod m \iff (\exists k \in \mathbf{Z}) y - x = km,$$

jeste relacija ekvivalencije. Dokazati. Opisati klase ekvivalencije i količnički skup.

7. Na skupu $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ parova celih brojeva kod kojih druga komponenta nije jednaka nuli definisana je relacija ρ pomoću

$$(a,b)\,\rho\,(c,d) \iff ad = bc.$$

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Objasniti zašto se količnički skup može shvatiti kao skup racionalnih brojeva.

8. Neka je $f: X \to Y$ i ρ relacija na X definisana sa $x_1 \,\rho\, x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Kakve su klase ekvivalencije ako je f injektivna?

9. Neka je $\mathcal{A} = \{ A_i \mid i \in I \}$ *dekompozicija* skupa X, tj. neka: 1° $(\forall i \in I)\emptyset \neq A_i \subset X$; 2° $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$; 3° $\bigcup_{i\in I} A_i = X$. Ako se relacija ρ na X definiše pomoću

$$x \,\rho\, y \iff (\exists i \in I)x, y \in A_i,$$

ρ je relacija ekvivalencije, a skupovi A_i su klase ekvivalencije. Dokazati.

10. Na skupu $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definisane su relacije ρ i σ pomoću:

$$(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2) \iff x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2),$$
$$(x_1,y_1)\,\sigma\,(x_2,y_2) \iff x_1 \leqslant x_2 \wedge y_1 \leqslant y_2.$$

Dokazati da su ρ i σ relacije poretka, pri čemu je poredak ρ totalan, a σ to nije. Odrediti supremum i infimum skupa $A = [0,1) \times [0,1)$ (ako postoje) u odnosu na relacije ρ i σ.

11. *Identička relacija* (jednakost) i_X skupa X je *dijagonala* skupa $X \times X$: $i_X = \Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$. *Inverzna relacija* ρ^{-1} relacije ρ iz skupa X u skup Y jeste relacija iz Y u X, definisana sa $\rho^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\}$. *Kompozicija relacija* ρ i σ (pri čemu je ρ relacija iz X u Y, a σ relacija iz Y u Z) je relacija $\sigma\circ\rho = \{(x,z) \mid (\exists y \in Y)(x\,\rho\,y \wedge y\,\sigma\,z)\}$. Dokazati:

(a) Ako je ρ relacija iz X u Y, a σ relacija iz Y u X i važi $\sigma\circ\rho = i_X$, $\rho\circ\sigma = i_Y$, onda su ρ i σ funkcije, i to međusobno inverzne.

(b) Ako je ρ relacija na X, tada:

1° ρ je refleksivna ako i samo ako je $i_X \subset \rho$;
2° ρ je simetrična ako i samo ako je $\rho = \rho^{-1}$;
3° ρ je antisimetrična ako i samo ako je $\rho \cap \rho^{-1} \subset i_X$;
4° ρ je tranzitivna ako i samo ako je $\rho\circ\rho \subset \rho$.

12. Dati su skupovi $A = \{1,2,\ldots,k\}$ i $B = \{1,2,\ldots,n\}$. Odrediti broj (a) svih funkcija $f: A \to B$; (b) svih injektivnih funkcija $f: A \to B$ (uz pretpostavku $k \leqslant n$).

13. Neka je S skup i $X = \mathcal{P}S$. Definišimo preslikavanje $C: X \to X$ sa $C(A) = \complement A$ (komplementiranje u odnosu na S). Dokazati da je C bijekcija i da je $C^{-1} = C$.

14. Ako funkcije $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ imaju inverzne funkcije, dokazati da je $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

15. (a) Neka je funkcija $f: X \to Y$ injektivna. Tada za svake dve funkcije g_1, $g_2: Z \to X$ važi

$$f\circ g_1 = f\circ g_2 \implies g_1 = g_2.$$

(b) Neka je funkcija $f: X \to Y$ surjektivna. Tada za svake dve funkcije g_1, $g_2: Y \to Z$ važi

$$g_1\circ f = g_2\circ f \implies g_1 = g_2.$$

16. Dokazati sledeće osobine slike skupa funkcijom $f: X \to Y$ (A_1 i A_2 su podskupovi skupa X): 1° $f(\emptyset) = \emptyset$; 2° $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$; 3° $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; 4° $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$; 5° $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$. Pokazati da u 4° i 5° inkluzije mogu biti stroge.

17. Neka je $f: X \to Y$. Dokazati:

1° f je injektivna ako i samo ako za svaka dva skupa A_1, $A_2 \subset X$ važi $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

2° f je surjektivna ako i samo ako za svaki $A \subset X$ važi $\complement f(A) \subset f(\complement A)$.

3° Ako je f surjektivna, ona je i injektivna ako i samo ako za svaki $A \subset X$ važi $\complement f(A) = f(\complement A)$.

18. Dokazati sledeće osobine inverzne slike skupa funkcijom $f: X \to Y$ (B, B_1 i B_2 su podskupovi skupa Y): 1° $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$; 2° $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$; 3° $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; 4° $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$; 5° $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$; 6° $f^{-1}(\complement B) = \complement f^{-1}(B)$.

19. Neka je $f: X \to Y$ i $\mathcal{A} = \{ A_i \mid i \in I \}$, $\mathcal{B} = \{ B_i \mid i \in I \}$ su familije skupova u X, odnosno Y. Dokazati da je: 1° $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$; 2° $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$; 3° $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; 4° $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

20. Svakom podskupu A datog skupa X može se pridružiti njegova *karakteristična funkcija* $\chi_A: X \to \{0,1\}$, koja se definiše pomoću

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in A, \\ 0, & \text{za } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Dokazati: 1° $A \mapsto \chi_A$ je bijekcija partitivnog skupa $\mathcal{P}X$ u skup svih preslikavanja $f: X \to \{0,1\}$; 2° $\chi_X = 1$, $\chi_\emptyset = 0$; 3° $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$; 4° $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$; 5° $\chi_{\complement A} = 1 - \chi_A$; 6° $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$.

2. REALNI I KOMPLEKSNI BROJEVI

Realna analiza bavi se funkcijama čiji su domen ili kodomen (ili oboje) podskupovi skupa $\mathbf{R}$ realnih brojeva. Zbog toga je potrebno da se, pre nego što počnemo ispitivanje svojstava takvih funkcija, upoznamo sa osobinama skupa $\mathbf{R}$.

Postoji više načina uvođenja realnih brojeva. Mogu se podeliti na konstruktivne — kod kojih se, polazeći od već uvedenog skupa racionalnih brojeva, efektivno konstruišu realni brojevi — i aksiomatske. Mi ćemo koristiti ovaj drugi način koji omogućava da nešto brže izvedemo osnovna pravila računanja sa realnim brojevima.

2.1. AKSIOME REALNIH BROJEVA

DEFINICIJA 2.1.1

Pod *skupom realnih brojeva* podrazumevamo skup $\mathbf{R}$ u kome su definisane dve binarne operacije $+$ i $\cdot$ (koje zovemo *sabiranjem* i *množenjem*) i binarna relacija $\leqslant$, tako da su ispunjena sledeća svojstva:

(1) svojstva sabiranja:
(1.1) $(\forall x, y \in \mathbf{R})\, x + y = y + x$,
(1.2) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\, (x + y) + z = x + (y + z)$,
(1.3) postoji element $0 \in \mathbf{R}$, takav da je $x + 0 = x$ za sve $x \in \mathbf{R}$,
(1.4) za svaki element $x \in \mathbf{R}$ postoji element $-x \in \mathbf{R}$, tako da je $x + (-x) = 0$;
(2) svojstva množenja:
(2.1) $(\forall x, y \in \mathbf{R})\, x \cdot y = y \cdot x$,
(2.2) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
(2.3) postoji element $1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, tako da je $x \cdot 1 = x$ za sve $x \in \mathbf{R}$,
(2.4) za svaki element $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ postoji element $x^{-1} \in \mathbf{R}$, tako da je $x \cdot x^{-1} = 1$,
(2.5) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

(3) svojstva relacije $\leqslant$:
(3.1) $(\forall x \in \mathbf{R})\, x \leqslant x$,
(3.2) $(\forall x, y \in \mathbf{R})(x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y)$,
(3.3) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R})(x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z)$,
(3.4) za svaka dva elementa $x, y \in \mathbf{R}$ važi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$,
(3.5) ako je $x \leqslant y$ i z proizvoljan element iz $\mathbf{R}$, važi $x + z \leqslant y + z$,
(3.6) ako je $0 \leqslant x$ i $0 \leqslant y$, onda je i $0 \leqslant x \cdot y$;
(4) ako su A i B neprazni podskupovi skupa $\mathbf{R}$, takvi da je $x \leqslant y$ za sve $x \in A$, $y \in B$, tada postoji element $z \in \mathbf{R}$, takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za sve $x \in A$, $y \in B$.

U daljem ćemo obično umesto $x \cdot y$ pisati xy.

Osobine (1.1)–(1.4) govore da u odnosu na sabiranje skup $\mathbf{R}$ ima strukturu *Abelove* grupe*. Zajedno sa njima, aksiome (2.1)–(2.5) označavaju da je $\mathbf{R}$ u odnosu na sabiranje i množenje *polje*. Najzad, relacija totalnog uređenja $\leqslant$, na osnovu (3.5) i (3.6), slaže se sa operacijama $+$ i $\cdot$, te takvo polje zovemo *uređenim poljem*. Zajedno, aksiome (1.1)–(3.6) zovemo *algebarskim aksiomama* skupa $\mathbf{R}$.

Aksioma (4) je najvažnija za uvođenje osnovnih pojmova analize. Iz razloga koji će nešto kasnije biti jasni nazivaćemo je *aksiomom potpunosti* ili *aksiomom neprekidnosti*. Naravno, za razliku od algebarskih aksioma, za nju se ne bi moglo reći da predstavlja svojstvo skupa $\mathbf{R}$ koje je „očigledno" i „uobičajeno" u radu sa realnim brojevima. No, ona je neophodna za analizu, a ne može se izvesti iz algebarskih aksioma; jedino je moguće da se ona zameni nekim njoj ekvivalentnim iskazom. Neke od tih iskaza izvešćemo kao posledice aksiome (4) u odeljcima 2.4 i 2.7.

U vezi sa svakim sistemom aksioma, pa i u vezi sa našim aksiomama skupa realnih brojeva, postavljaju se bar dva principijelna pitanja. Prvo je pitanje da li je dati sistem aksioma *neprotivrečan*, tj. da li je sigurno nemoguće iz njega izvesti kao posledice dva međusobno kontradiktorna stava. Na drugi način iskazano, pitanje je ustvari da li postoji skup $\mathbf{R}$ sa opisanima svojstvima. Drugo pitanje se odnosi na tzv. *kategoričnost* datog sistema aksioma, tj. pitanje je da li se njime skup $\mathbf{R}$ jednoznačno opisuje.

Detaljni odgovori na pomenuta pitanja izlaze van okvira ovog kursa. Ograničićemo se zato samo na kratku informaciju s tim u vezi.

Odgovor na prvo pitanje, pitanje o neprotivrečnosti, uvek nosi uslovni karakter. Naime, ono se rešava konstruisanjem *modela* ili *realizacije* datog sistema aksioma u okviru neke matematičke strukture za koju se *a priori* pretpostavlja da je neprotivrečna. U tom smislu, za naš sistem aksioma odgovor je potvrdan, jer se može pokazati da se pomenuti model može konstruisati ako se pretpostavi da je neprotivrečan sistem aksioma prirodnih brojeva. Neke od takvih realizacija pomenućemo kratko u odeljku 2.5, a detaljan dokaz pomenute činjenice može se naći, na primer, u knjizi [10] popisa literature. Svaki od konstruktivnih načina uvođenja skupa realnih brojeva opisanih, na primer, u knjigama [14], [24], [29] daje takođe dokaz neprotivrečnosti našeg sistema aksioma.

* N. H. Abel (1802–1829), norveški matematičar

Pre nego što damo drugi odgovor, precizirajmo najpre pitanje o kategoričnosti. Pretpostavimo da su moguće dve realizacije našeg sistema aksioma — u jednoj se radi o skupu R_1 sa operacijama $+_1$ i $\cdot_1$ i relacijom $\leqslant_1$, a u drugoj o skupu R_2 sa operacijama $+_2$ i $\cdot_2$ i relacijom poretka $\leqslant_2$. Kazaćemo da su te dve realizacije *izomorfne* ako postoji funkcija $f\colon \mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_2$ koja je bijekcija i takva da je za svaka dva elementa $x, y \in \mathrm{R}_1$ ispunjeno:

$$f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y),$$
$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y),$$
$$x \leqslant_1 y \iff f(x) \leqslant_2 f(y).$$

Drugim rečima, kod izomorfnih realizacija svi međusobni odnosi čuvaju se pri preslikavanju funkcijom f, koja se naziva *izomorfizmom* pomenutih realizacija. Pitanje o kategoričnosti sada možemo ovako postaviti: da li su proizvoljne dve realizacije datog sistema aksioma izomorfne? Odgovor je potvrdan. Dokaz te činjenice može se naći, na primer, u knjigama [10], [11], [30] popisa literature.

2.2. POSLEDICE ALGEBARSKIH AKSIOMA

U ovom odeljku pokazaćemo kako se neka od uobičajenih pravila računanja sa realnim brojevima mogu izvesti iz algebarskih aksioma (1.1)–(3.6).

STAV 2.2.1

1° *Neutralni element sabiranja 0 jedinstveno je određen.*

2° *Za svaki realan broj x suprotni element $-x$ jedinstveno je određen.*

3° *Za svaka dva realna broja a, b jednačina $a + x = b$ ima jedinstveno rešenje.*

Dokaz.

1° Ako bi 0_1 i 0_2 bila dva neutralna elementa sabiranja, imali bismo

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

2° Ako bi x_1 i x_2 bila dva suprotna elementa elementu x, imali bismo

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

3° Pokažimo da $x = b + (-a)$ zadovoljava jednačinu $a + x = b$. Zaista,

$$a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Da i obrnuto, iz $a + x = b$ sledi $x = b + (-a)$, vidimo iz sledećeg niza implikacija

$$a + x = b \implies (a + x) + (-a) = b + (-a) \implies x = b + (-a). \quad \blacksquare$$

Broj $x = b + (-a)$ konstruisan u prethodnom dokazu označavaćemo dalje sa $b - a$. Time je u skupu $\mathbf{R}$ uvedena operacija *oduzimanja* sa uobičajenim svojstvima.

STAV 2.2.2

1° *Jedinični element množenja 1 jedinstveno je određen.*

2° *Za svaki realan broj $x \neq 0$ inverzni element x^{-1} jedinstveno je određen.*

3° *Za svaka dva realna broja a, b $(a \neq 0)$ jednačina $ax = b$ ima jedinstveno rešenje.*

4° *Za svako $x \in \mathrm{R}$ je $x \cdot 0 = 0$.*

5° *Ako je $xy = 0$, onda je $x = 0$ ili $y = 0$.*

6° *Za svako $x \in \mathrm{R}$ je $-x = (-1)x$.*

7° $(-1)(-1) = 1$.

8° $(-x)(-y) = xy$, *za sve* $x, y \in \mathrm{R}$.

Dokaz.

Svojstva 1°–3° dokazuju se analogno prethodnom stavu.

4° Važi

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x(1 + 0) = x \cdot 1 = x,$$

a kako je neutralni element sabiranja jednoznačno određen, sledi $x \cdot 0 = 0$.

5° Neka je, na primer, $y \neq 0$. Na osnovu 4° broj $x = 0$ zadovoljava jednačinu $xy = 0$, a kako na osnovu 3° ta jednačina ima samo jedno rešenje, to sledi da je $x = 0$.

6° Iz $x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0$ i 2° stava 1 sledi $(-1)x = -x$.

7° Iz $(-1)(-1) - 1 = (-1)(-1) + (-1) \cdot 1 = (-1)(-1+1) = 0$ sledi $(-1)(-1) = 1$.

8° Iz 7°, 6° i komutativnosti sledi $(-x)(-y) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot y = (-1)(-1)xy = xy$. $\blacksquare$

Analogno oduzimanju uvodi se *deljenje* realnih brojeva pomoću $b \cdot a^{-1} = b/a$ za $a \neq 0$.

U iskazu sledećeg stava, u kome se navode neke posledice treće grupe aksioma, pored znaka $\leqslant$ koristićemo i oznake $<$, $\geqslant$ i $>$ koje se uvode na sledeći način: $x < y \iff x \leqslant y,\ x \neq y$; $x \geqslant y \iff y \leqslant x$; $x > y \iff y < x$.

STAV 2.2.3

1° *Za svaka dva broja $x, y \in \mathrm{R}$ važi tačno jedna od sledeće tri mogućnosti:*

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y.$$

2° *Relacije $x \leqslant y$, $0 \leqslant y - x$, $-y \leqslant -x$, $x - y \leqslant 0$ su međusobno ekvivalentne. Slično važi kada se znak $\leqslant$ zameni znakom $<$.*

3° *Iz $x < y$ sledi $x + z < y + z$, za svako $z \in \mathrm{R}$.*

4° *Ako je $x > 0$ i $y > 0$, onda je $xy > 0$.*

5° *Iz $x \leqslant y$ i $0 \leqslant z$ sledi $xz \leqslant yz$. Slično važi kada se znak $\leqslant$ zameni znakom $<$.*

6° *Iz $0 < x \leqslant y$ i $0 < z \leqslant t$ sledi $xz \leqslant yt$. Slično važi kada se znak $\leqslant$ zameni znakom $<$.*

7° *Iz $x \leqslant 0$ i $y \geqslant 0$ sledi $xy \leqslant 0$; iz $x \leqslant 0$ i $y \leqslant 0$ sledi $xy \geqslant 0$.*

8° $0 < 1$.

9° *Ako je $x > 0$, onda je $x^{-1} > 0$; ako je $0 < x < y$, onda je $0 < y^{-1} < x^{-1}$.*

Dokaz.

Dokazi ovih osobina su jednostavni, pa ćemo dokazati samo neke od njih.

2° sledi iz aksiome (3.5).

3° i 4° slede iz odgovarajućih aksioma za znak $\leqslant$ i definicije znakova $<$ i $>$.

5° sledi iz 2° i $yz - xz = (y - x)z \geqslant 0$.

7° Iz $x \leqslant 0$ sledi $-x \geqslant 0$, a odatle i iz $y \geqslant 0$ sledi $-(xy) = (-x)y \geqslant 0$, tj. $xy \leqslant 0$ (primenili smo 2°, aksiomu (3.6) i svojstvo 6° iz stava 2). Slično se proverava drugo tvrđenje.

8° Iz 7° sledi da je za svako $x \in \mathbf{R}$ ispunjeno $x \cdot x \geqslant 0$; specijalno za $x \neq 0$ (zbog 5° stava 2) je $x \cdot x > 0$. Zato je $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

9° Zbog $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$, ako je $x > 0$, mora biti $x^{-1} > 0$, na osnovu 7°. ■

Za broj $x \in \mathbf{R}$ kažemo da je *pozitivan* ako je $x > 0$, *nenegativan* ako je $x \geqslant 0$, *negativan* ako je $x < 0$ i *nepozitivan* ako je $x \leqslant 0$. Takođe uvodimo pojam *apsolutne vrednosti (modula)* realnog broja pomoću

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

STAV 2.2.4

1° *Za* $\varepsilon > 0$, *nejednakost* $|x - a| \leqslant \varepsilon$ *ekvivalentna je sa* $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$.

2° *Za svaka dva realna broja* x, y *važi*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Jednakost važi ako i samo ako su oba broja x *i* y *nenegativna ili oba nepozitivna.*

3° *Za sve* x, $y \in \mathbf{R}$ *važi* $|xy| = |x| \cdot |y|$ *i* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ *(ako je* $y \neq 0$*).*

Dokaz.

Dokazaćemo samo tvrđenje 2°, koje se nekad naziva *nejednakošću trougla* i, kako ćemo videti, igra važnu ulogu u mnogim dokazima u analizi.

Da jednakost $|x + y| = |x| + |y|$ važi ako su oba broja nenegativna ili oba nepozitivna, očigledno je. Neka je, na primer, $x > 0$ i $y < 0$. Tada je

$$x + y < x < x + |y| = |x| + |y|,$$
$$-(x + y) = -x - y < -y = |y| < |x| + |y|,$$

odakle je, na osnovu 1°, $|x + y| < |x| + |y|$. ■

2.3. NEKI VAŽNIJI PODSKUPOVI SKUPA REALNIH BROJEVA

U ovom odeljku pokazaćemo kako se u okviru aksiomatski uvedenog skupa $\mathbf{R}$ realnih brojeva mogu uvesti uobičajeni podskupovi prirodnih, celih, racionalnih i iracionalnih brojeva.

Prirodni brojevi. Princip matematičke indukcije

Intuitivno, prirodni brojevi predstavljaju skup koji se dobija polazeći od jediničnog elementa skupa $\mathbf{R}$, dodavanjem te jedinice neograničeno mnogo puta samoj sebi. Da bismo tu konstrukciju precizirali, uvedimo pojam induktivnog skupa.

DEFINICIJA 2.3.1

Podskup A skupa $\mathbf{R}$ naziva se *induktivnim* ako važi

$$(\forall x)(x \in A \implies x + 1 \in A).$$

Jasno je da induktivni skupovi postoje — takav je, na primer, sam skup $\mathbf{R}$. Takođe, ako je $\{ A_i \mid i \in I \}$ bilo kakva familija induktivnih skupova, tada je i njen presek $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ takođe induktivan skup. Zaista, iz $x \in A$ sledi $x \in A_i$ za svako $i \in I$, pa, kako su svi skupovi A_i induktivni, takođe i $x + 1 \in A_i$ za svako $i \in I$. Najzad, odatle je i $x + 1 \in A$, što znači da je i skup A induktivan.

Na taj način i presek svih induktivnih podskupova skupa $\mathbf{R}$ koji sadrže 1 jeste induktivan skup i to, očigledno, najmanji (u smislu inkluzije) induktivan skup u $\mathbf{R}$ koji sadrži 1. Upravo taj skup i nazvaćemo skupom prirodnih brojeva.

DEFINICIJA 2.3.2

Skup $\mathbf{N}$ *prirodnih brojeva* jeste najmanji induktivan podskup skupa $\mathbf{R}$ koji sadrži 1.

Iz same definicije neposredno sledi osnovni princip rada sa prirodnim brojevima — *princip matematičke indukcije.*

TEOREMA 2.3.1

Ako podskup A *skupa* $\mathbf{N}$ *ima sledeće osobine:*

1° $1 \in A$,

2° $(\forall x)(x \in A \implies x + 1 \in A)$,

tada se A *poklapa sa skupom* $\mathbf{N}$. ■

Pomoću ovog principa dokazaćemo sada nekoliko jednostavnih svojstava prirodnih brojeva.

STAV 2.3.1

1° $m, n \in \mathbf{N} \implies m + n \in \mathbf{N}, \quad mn \in \mathbf{N}$.

2° $n \in \mathbf{N}$ *i* $n \neq 1 \implies n - 1 \in \mathbf{N}$.

3° $m, n \in \mathbf{N}$ *i* $m > n \implies m - n \in \mathbf{N}$.

4° $\min \mathbf{N} = 1$, *tj.* $(\forall n \in \mathbf{N})\, n \geqslant 1$;
$m, n \in \mathbf{N}$ *i* $m > n \implies m \geqslant n + 1$.

5° *Svaki neprazan skup* $A \subset \mathbf{N}$ *ima minimalan element.*

Dokaz.

1° Neka je $m \in \mathbf{N}$ fiksiran i $A = \{ n \in \mathbf{N} \mid m + n \in \mathbf{N} \}$. Prvi deo tvrđenja 1° biće dokazan ako pokažemo da je $A = \mathbf{N}$, što ćemo učiniti indukcijom. $1 \in A$ je očigledno zbog $m + 1 \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$ je induktivan!). Ako je $n \in A$, tj. $m + n \in \mathbf{N}$, onda je i $m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbf{N}$, pa je i $n + 1 \in A$, čime su oba induktivna uslova zadovoljena.

Slično, ako je za $m \in \mathbf{N}$, $A = \{ n \in \mathbf{N} \mid mn \in \mathbf{N} \}$, imamo $1 \in A$ (jer $m \cdot 1 = m \in \mathbf{N}$) i za $n \in A$ (tj. $mn \in \mathbf{N}$) takođe i $m(n + 1) = mn + m \in \mathbf{N}$, na osnovu upravo dokazane činjenice da je zbir dva prirodna broja prirodan broj. Zato je i $n + 1 \in A$, čime je induktivni dokaz da je $A = \mathbf{N}$ završen.

2° Označimo $A = \{n - 1 \mid n \in \mathbf{N}, n \neq 1\}$ i dokažimo da je $A = \mathbf{N}$. Zbog $1 \in \mathbf{N}$ imamo $1 + 1 \in \mathbf{N}$, pa je $1 = (1 + 1) - 1 \in A$. Ako je $m \in A$, onda je $m = n - 1$ za neko $n \in \mathbf{N}$. Tada je $m + 1 = (n + 1) - 1$, pa zbog $n + 1 \in \mathbf{N}$ imamo i $m + 1 \in A$. Time je induktivno dokazano da je $A = \mathbf{N}$.

3° Fiksirajmo ponovo $m \in \mathbf{N}$. Ako je $n = 1$, tada iz $m > n = 1$ sledi $m \neq 1$, pa na osnovu 2°, $m - n = m - 1 \in \mathbf{N}$. Pretpostavimo sada da iz $m > n$ sledi $m - n \in \mathbf{N}$ i neka je $m > n + 1$. Kako je $n + 1 > n$, to je tim pre $m > n$, dakle i $m - n \in \mathbf{N}$. Međutim, iz $m > n + 1$ sledi $m - n > 1$, pa na osnovu prvog dela dokaza imamo $(m - n) - 1 \in \mathbf{N}$, odnosno $m - (n + 1) \in \mathbf{N}$. Time je induktivni dokaz da iz $m > n$ sledi $m - n \in \mathbf{N}$ završen.

4° Ako je $A = \{n \in \mathbf{N} \mid 1 \leqslant n\}$, očigledno $1 \in A$ jer je $1 \leqslant 1$. Takođe, ako je $n \in A$, onda iz $1 \leqslant n$ i $0 \leqslant 1$ sledi $1 \leqslant n + 1$, pa i $n + 1 \in A$. Odatle je $A = \mathbf{N}$.

Dalje, iz $m > n$, na osnovu 3°, imamo $m - n \in \mathbf{N}$, pa kako je $\min \mathbf{N} = 1$, to je $m - n \geqslant 1$, tj. $m \geqslant n + 1$.

5° Ako je $1 \in A$, iz 4° sledi da je $\min A = 1$.

Pretpostavimo sada da $1 \notin A$, tj. da $1 \in B = \mathbf{N} \setminus A$. U skupu B mora se naći takav broj n da svi prirodni brojevi manji od njega takođe pripadaju skupu B, a da $n + 1 \in A$. Zaista, ako takvog elementa ne bi bilo, tada bi skup $B \subset \mathbf{N}$, koji sadrži jedinicu, zajedno sa svakim n sadržavao i $n + 1$, pa bismo imali $B = \mathbf{N}$, što je nemoguće zbog $A = \mathbf{N} \setminus B \neq \emptyset$.

Nađeni broj $n + 1 \in A$ i jeste traženi $\min A$, jer na osnovu drugog dela tvrđenja 4° između n i $n + 1$ nema prirodnih brojeva. ■

Dalje ćemo koristiti uobičajene oznake $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$, ...

Princip indukcije može se koristiti i za definisanje novih pojmova i oznaka. Tako, na primer, ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ realni brojevi, definišemo zbir $\sum_{i=1}^{n} x_i$ na sledeći način:

$$\sum_{i=1}^{1} x_i = x_1 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) + x_n, \quad \text{ako je poznato} \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i.$$

Na sličan način uvodi se oznaka za proizvod $\prod_{i=1}^{n} x_i$ brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$. U ovim oznakama lako je formulisati i dokazati neka uopštenja ranije navedenih aksioma i stavova:

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ima istu vrednost, nezavisno od toga kako se u tom izrazu rasporede zagrade; slično važi za $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$ (uopšteni asocijativni zakon),

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ima istu vrednost, nezavisno od toga kako se izvrši permutacija sabiraka; slično važi za $\prod_{i=1}^{n} x_i$ (uopšteni komutativni zakon),

$$x\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x y_i \text{ (uopšteni distributivni zakon)},$$

$$0 \leqslant x_i \ (i = 1, 2, \ldots, n) \implies 0 \leqslant \prod_{i=1}^{n} x_i \text{ (uopštenje aksiome (3.6))},$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 0 \implies (\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\})\, x_i = 0,$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant y_i \ (i = 1, 2, \ldots, n) \implies \prod_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} y_i,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ (uopštena nejednakost trougla)},$$

$$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Takođe, na ovaj način se uvodi pojam *stepena*: $x^1 = x$ i $x_n = x^{n-1} \cdot x$ za $n = 2, 3, \ldots$, za koji se onda lako dokazuju poznate osobine, na primer:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}, \quad (xy)^n = x^n y^n.$$

Celi brojevi

Označimo sa $-\mathbf{N}$ skup svih suprotnih elemenata prirodnih brojeva: $-\mathbf{N} = \{-n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

DEFINICIJA 2.3.3
Pod skupom *celih brojeva* podrazumevamo skup $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbf{N})$.

Na osnovu definicije i već dokazanih osobina prirodnih brojeva neposredno se dokazuje

STAV 2.3.2
$(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ *je komutativan prsten sa jedinicom.* ■

Naravno, $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ nije polje, jer osim elemenata 1 i -1 nijedan drugi element skupa $\mathbf{Z}$ nema inverzni u $\mathbf{Z}$. Na taj način, ni deljenje nije neograničeno izvodljivo u $\mathbf{Z}$, što dovodi do uvođenja *relacije deljivosti*, osnovne relacije *teorije brojeva*:

$$a \mid b \iff (\exists k \in \mathbf{Z})\, b = ak.$$

Pretpostavljaćemo da su osnovni pojmovi i stavovi te teorije poznati čitaocu.

Koristeći se celim brojevima, možemo proširiti pojam stepena:

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = (x^n)^{-1} \quad \text{za } n \in \mathbf{N}, x \neq 0.$$

Lako je proveriti da ostaju na snazi osnovne osobine stepenovanja.

Racionalni brojevi

DEFINICIJA 2.3.4
Pod *racionalnim brojem* podrazumeva se svaki broj oblika p/q, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. Skup svih racionalnih brojeva označava se sa $\mathbf{Q}$.

Za operisanje sa racionalnim brojevima važe poznata pravila računanja sa razlomcima. Posebno, važi $pk/qk = p/q$, $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, zbog čega se kao predstavnik svih brojeva oblika p/q uzima onaj kod koga su p i q uzajamno prosti (u oznaci $(p, q) = 1$). Važi

STAV 2.3.3
$(\mathbf{Q}, +, \cdot, \leqslant)$ *je uređeno polje.* ■

Dakle, skup Q zadovoljava aksiome (1.1)–(3.6). Međutim, Q ne zadovoljava aksiomu neprekidnosti (4) i u tome je osnovna razlika između polja Q i R.

Zaista, neka je $A = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2 \}$ i $B = \{ x \in \mathbf{Q} \mid x \geqslant 0, x^2 > 2 \}$. Tada su A i B dva neprazna podskupa skupa Q, takva da je $x \leqslant y$ za sve $x \in A$, $y \in B$. Dokažimo da ne postoji element $z \in \mathbf{Q}$, takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za sve $x \in A$, $y \in B$. Takav element, ako bi postojao, morao bi očigledno da bude pozitivan. Za njegov kvadrat postojale bi tri mogućnosti: $z^2 < 2$, $z^2 = 2$, $z^2 > 2$. Mogućnost $z^2 = 2$ otpada, jer ako bi $z = p/q$, $(p, q) = 1$, bio razlomak za koji je $z^2 = 2$, imali bismo $p^2 = 2q^2$, odakle, $2 \mid p$ i zato $2r^2 = q^2$, $r \in \mathbf{Z}$, pa i $2 \mid q$, suprotno pretpostavci $(p, q) = 1$.

Dokažimo da je i $z^2 < 2$ nemoguće. Pretpostavimo da je to ispunjeno i izaberimo prirodan broj n za koji je $n > \dfrac{2z+1}{2-z^2}$ (koristimo se činjenicom da se od svakog racionalnog broja može naći veći prirodan broj, činjenicom koja se u skupu Q lako dokazuje (v. zadatak 19.(b))). Tada je

$$\left(z + \frac{1}{n}\right)^2 = z^2 + \frac{2z}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant z^2 + \frac{2z+1}{n} < z^2 + (2 - z^2) = 2,$$

tj. broj $z + \dfrac{1}{n}$, koji je očigledno veći od z, ima takođe kvadrat manji od 2, pa pripada skupu A, što je suprotno izboru broja z.

Na sličan način dokazuje se da ne može biti ni $z^2 > 2$. Znači, broj z sa pomenutim osobinama ne može postojati i aksioma (4) u skupu Q ne važi.

Ovim smo ujedno dokazali da se skup Q ne poklapa sa R, tj. u skupu R moraju postojati brojevi koji nisu racionalni. Takve brojeve nazivamo *iracionalnim*, a njihovo otkriće pripisuje se Pitagori* ili njegovim učenicima. Nešto kasnije pokazaćemo da iracionalnih brojeva ustvari ima i „više" nego racionalnih — tačan smisao izraza „više" uvešćemo u odeljku 2.8.

2.4. POSLEDICE AKSIOME NEPREKIDNOSTI

Već smo govorili o važnosti koju aksioma neprekidnosti (4) ima za razvijanje analize u skupu realnih brojeva. U ovom odeljku izvešćemo nekoliko važnih posledica te aksiome koje ćemo kasnije često koristiti, naročito u teoriji graničnih vrednosti i neprekidnosti.

Počećemo sa važnom *teoremom o supremumu*, jednim od ekvivalenata aksiome neprekidnosti, koji bi, dakle, mogao da stoji umesto nje u spisku aksioma. Podsetimo se da pod supremumom podskupa A datog uređenog skupa $(X, \leqslant)$ podrazumevamo najmanju (ako postoji) od njegovih majoranata, tj. onaj element $x \in X$

* Pitagora (oko 582–500 p.n.e.), starogrčki matematičar

za koji važi: 1° $(\forall a \in A)\, a \leqslant x$ i 2° $((\forall a \in A)\, a \leqslant y) \implies x \leqslant y$. Koristeći postojanje algebarskih operacija, za karakterizaciju supremuma u skupu R možemo uzeti konjunkciju sledećih uslova:

$$x = \sup A \iff \begin{cases} 1^\circ & (\forall a \in A)\, a \leqslant x, \\ 2^\circ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\, a > x - \varepsilon. \end{cases}$$

Na analogan način se karakteriše infimum nekog podskupa skupa R.

Podsetimo se takođe da egzistencija supremuma nekog skupa, čak ni onog koji je ograničen odozgo (tj. ima majorante), nije unapred obezbeđena u proizvoljnom uređenom skupu. To je povezano sa činjenicom da proizvoljan podskup uređenog skupa, pa samim tim ni skup majoranata datog podskupa, ne mora imati minimum. Međutim, kao što ćemo odmah videti, u uređenom polju R koje zadovoljava aksiomu (4) egzistencija supremuma odozgo ograničenog skupa obezbeđena je.

TEOREMA 2.4.1

Svaki neprazan, odozgo ograničen podskup skupa R *ima supremum u* R. *Svaki neprazan, odozdo ograničen podskup skupa* R *ima infimum u* R.

Dokaz.

Označimo sa $B = \{ y \in \mathbf{R} \mid (\forall x \in A)\, x \leqslant y \}$ skup svih majoranata nepraznog, odozgo ograničenog skupa A. Prema pretpostavci, skupovi A i B su neprazni i važi $x \leqslant y$ za sve $x \in A$, $y \in B$. Prema aksiomi (4) postoji realan broj z, takav da je $x \leqslant z \leqslant y$ za sve $x \in A$, $y \in B$. Taj broj z je dakle i sam jedna majoranta skupa A i, istovremeno, najmanja od njegovih majoranata, tj. $z = \sup A$.

Tvrđenje o infimumu dokazuje se analogno. ■

Sledeća teorema iskazuje tzv. *Arhimedovo* svojstvo* uređenog polja R. Može se pokazati da ono ne sledi iz algebarskih aksioma, već je za njegovo izvođenje neophodna aksioma neprekidnosti.

TEOREMA 2.4.2

Za proizvoljne pozitivne realne brojeve a, b postoji (i jedinstveno je određen) prirodan broj n, takav da je $(n-1)a \leqslant b < na$.

Dokaz.

Pretpostavimo da broj $n \in \mathbf{N}$, takav da je $b < na$, ne postoji. Tada važi $na \leqslant b$ za svako $n \in \mathbf{N}$, pa je skup $A = \{ na \mid n \in \mathbf{N} \}$ ograničen odozgo. Na osnovu teoreme o supremumu postoji $\sup A = c$. Kako je $a > 0$, to je $c - a < c$, što pokazuje da broj $c - a$ ne može biti majoranta skupa A. Dakle, postoji broj $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da je $n_0 a > c - a$. No, onda je $(n_0 + 1)a > c$, što je kontradikcija sa $c = \sup A$.

Dakle, mora postojati broj $n \in \mathbf{N}$ za koji je $b < na$. Među svim takvim brojevima n postoji najmanji (v. stav 3.1.5°) — očigledno je da on zadovoljava $(n-1)a \leqslant b < na$. Jedinstvenost tog broja je jasna. ■

* Arhimed (287?–212 p.n.e.), starogrčki matematičar

Lako je videti da navedeno tvrđenje ostaje na snazi i ako dozvolimo da $b \in \mathbf{R}$ bude proizvoljnog znaka, s tim da broj n u tom slučaju biramo iz $\mathbf{Z}$ umesto iz $\mathbf{N}$. U tom slučaju za $a = 1$ dobijamo jednostavnu činjenicu

$$(\forall b \in \mathbf{R})(\exists! n \in \mathbf{Z})\, n - 1 \leqslant b < n.$$

Takav broj $n-1$ zvaćemo *celim delom* broja b i označavaćemo sa $[b]$.

Evo nekoliko jednostavnih, ali važnih, posledica Arhimedovog svojstva.

POSLEDICA 2.4.1

1° *Za svaki pozitivan broj ε postoji prirodan broj n, takav da je $0 < 1/n < \varepsilon$.*

2° *Ako je x nenegativan realan broj i za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $x < 1/n$, onda je $x = 0$.*

Dokaz.

1° Iz Arhimedovog svojstva sledi da postoji $n \in \mathbf{N}$, takav da je $1 < \varepsilon n$.

2° sledi iz 1°. ■

POSLEDICA 2.4.2

Ma kakvi bili realni brojevi a i b za koje je $a < b$, postoji racionalan broj x, takav da je $a < x < b$.

Dokaz.

Neka je $h = b - a$ i $q \in \mathbf{N}$ takav da je $qh > 1$ (on postoji na osnovu posledice 1). Ponovo na osnovu Arhimedovog svojstva zaključujemo da postoji $p \in \mathbf{Z}$, takav da je $\dfrac{p-1}{q} \leqslant a < \dfrac{p}{q}$. Pri tom je $\dfrac{p}{q} - a \leqslant \dfrac{1}{q} < b - a$, tako da je $\dfrac{p}{q} < b$. Na taj način, za $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ važi $a < x < b$. ■

Zbog svojstva racionalnih brojeva izraženog ovom posledicom kaže se da je skup $\mathbf{Q}$ *gust* u skupu $\mathbf{R}$.

Koristeći algebarske aksiome do sada smo sa realnim brojevima mogli da obavljamo pet računskih operacija — sabiranje, oduzimanje, množenje, deljenje i stepenovanje. Aksioma neprekidnosti omogućava nam da uvedemo i korenovanje ili, što je isto, stepenovanje racionalnim izložiocem. Kasnije ćemo videti kako se definiše stepen sa proizvoljnim realnim izložiocem.

TEOREMA 2.4.3

Za dati pozitivan broj x i prirodan broj n postoji i jednoznačno je određen pozitivan broj y, takav da je $y^n = x$. Dakle

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall x > 0)(\exists! y > 0)\, y^n = x.$$

Dokaz.

Označimo sa A skup $\{\, z \geqslant 0 \mid z^n \leqslant x \,\}$. Taj skup je očigledno neprazan i ograničen odozgo (brojem 1 ako je $x \leqslant 1$ i brojem x ako je $x \geqslant 1$), te na osnovu teoreme o supremumu postoji $y = \sup A$. Očigledno je $y > 0$. Dokažimo da je y traženi broj, tj. da je $y^n = x$.

Pretpostavimo da je $y^n < x$. Označimo $\varepsilon = x - y^n > 0$. Za svako h, $0 < h \leqslant 1$, važi

$$(y+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} h^k = y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} h^{k-1}$$
$$\leqslant y^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} = y^n + h[(1+y)^n - y^n]$$

(koristili smo binomnu formulu koja se dokazuje indukcijom — v. zadatak 7). Izaberimo h tako da je $h < \varepsilon/[(1+y)^n - y^n]$ (to je moguće na osnovu posledice 2). Tada je, prema prethodnom, $(y+h)^n \leqslant y^n + \varepsilon = x$, što znači da postoji element $y + h \in A$ koji je veći od y, što je u suprotnosti sa $y = \sup A$. Dakle, nemoguće je da bude $y^n < x$.

Na sličan način se pokazuje da je $y^n > x$ nemoguće. Zato je $y^n = x$, čime je egzistencija traženog broja y dokazana. Da ne mogu postojati dva takva broja jasno je, jer ako bi bilo $y_1^n = x$ i $y_2^n = x$ i, na primer, $y_1 < y_2$, bilo bi $x = y_1^n < y_2^n = x$, što je nemoguće. ■

Broj y iz prethodne teoreme nazivamo *n-tim korenom* broja x i označavamo sa $y = \sqrt[n]{x}$ ili $y = x^{1/n}$. Za novouvedenu operaciju korenovanja, odnosno stepenovanja racionalnim izložiocem važe poznata pravila — dokaz da je to tako ostavljamo za zadatak 13.

2.5. NEKE INTERPRETACIJE SISTEMA AKSIOMA REALNIH BROJEVA

U ovom odeljku ukratko ćemo opisati konstrukciju dveju najpoznatijih realizacija sistema aksioma realnih brojeva.

Decimalna reprezentacija realnog broja

Pokazaćemo da se pomoću niza cifara iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ može zapisati svaki realan broj.

Označimo $9 + 1 = 10$. Neka je x pozitivan realan broj. Postupajući kao u dokazu Arhimedovog svojstva, lako je pokazati da postoji i jednoznačno je određen broj $p \in \mathbf{Z}$, takav da je

$$10^p \leqslant x < 10^{p+1}.$$

Za nađeno p, primenjujući sāmo Arhimedovo svojstvo, zaključujemo da postoji tačno jedan broj $a_0 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, takav da je

$$a_0 \cdot 10^p \leqslant x < (a_0 + 1) \cdot 10^p.$$

Dalje, nalazimo broj $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, takav da je

$$a_0 \cdot 10^p + a_1 \cdot 10^{p-1} \leqslant x < a_0 \cdot 10^p + (a_1 + 1) \cdot 10^{p-1}.$$

Kada na takav način već odredimo brojeve $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, biramo broj $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$, takav da je

$$a_0 \cdot 10^p + a_1 \cdot 10^{p-1} + \cdots + a_n \cdot 10^{p-n} \leqslant x < a_0 \cdot 10^p + \cdots + a_{n-1} \cdot 10^{p-n+1} + (a_n+1) \cdot 10^{p-n}.$$

Na taj način formiramo niz cifara

$$a_0\, a_1\, a_2 \dots \quad (a_0 \neq 0). \tag{1}$$

Postavimo sada decimalni zarez po sledećem pravilu: ako je $p \geqslant 0$, zarez se postavlja između a_p i a_{p+1}; ako je $p < 0$, tj. $p = -p'$, $p' > 0$, ispred niza (1) dopišimo p' nula i posle prve od njih stavimo zarez.

Ako je $x < 0$, važi $x = -|x|$ i $|x|$ se može prikazati na napred opisani način; zapis broja x se dobija dopisivanjem znaka $-$ ispred dobijenog zapisa za broj $|x|$. Broju 0 pridružujemo niz $0, 00 \dots$.

Na taj način, svakom realnom broju x pridružili smo simbol oblika (1) (dopunjen decimalnim zarezom, eventualno nulama i znakom). Taj simbol nazivaćemo *decimalnom reprezentacijom* broja x. Može se pokazati da u ovako formiranoj decimalnoj reprezentaciji ne može da se dogodi da su sve cifre počev od neke jednake 9 (v. zadatak 15).

Pokažimo sada da, obrnuto, svakom nizu $b_1\, b_2 \dots$ cifara iz skupa $\{0, 1, \dots, 9\}$, sa zarezom na nekom mestu, pri čemu nisu svi b_i jednaki nuli i nisu svi b_i počev od nekog jednaki 9, odgovara neki realan broj $x > 0$ čija je decimalna reprezentacija upravo taj niz.

Neka je b_m prva cifra u datom nizu koja je različita od 0. Zarez se nalazi ili desno od b_m za $q \geqslant 0$ cifara (ne računajući sāmo b_m) ili levo od b_m za $r \geqslant 1$ cifara (računajući i b_m); u drugom slučaju stavimo $q = -r$.

Označimo sada

$$x = \sup\{\, 10^q \cdot b_m + 10^{q-1} \cdot b_{m+1} + \cdots + 10^{q-k} \cdot b_{m+k} \mid k \in \mathbf{N} \,\}.$$

Cilj nam je da dokažemo da je decimalna reprezentacija realnog broja x upravo dati niz $b_1\, b_2 \dots$.

Neka je fiksiran $s \in \mathbf{N}$ i zatim izabrano $t > s$, tako da je $b_{m+t} \leqslant 8$; neka je $k > t$ proizvoljno. Tada, koristeći formulu za zbir geometrijskog niza (v. zadatak 5), dobijamo

$$\begin{aligned} &10^{q-(s+1)} b_{m+s+1} + \cdots + 10^{q-t} b_{m+t} + \cdots + 10^{q-k} b_{m+k} \\ &\quad \leqslant 9 \cdot 10^{q-(s+1)} + \cdots + 9 \cdot 10^{q-t} + \cdots + 9 \cdot 10^{q-k} - 10^{q-t} \\ &\quad = 9 \cdot \frac{10^{q-(s+1)} - 10^{q-(k+1)}}{1 - 10^{-1}} - 10^{q-t} < 10^{q-s} - 10^{q-t}. \end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} x &\leqslant 10^q b_m + \cdots + 10^{q-s} b_{m+s} + 10^{q-s} - 10^{q-t} \\ &< 10^q b_m + \cdots + 10^{q-s}(b_{m+s} + 1). \end{aligned}$$

Dakle, za svako $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ je

$$10^q b_m + \cdots + 10^{q-s} b_{m+s} \leqslant x < 10^q b_m + \cdots + 10^{q-s}(b_{m+s} + 1).$$

Ako se setimo uvođenja broja p i znakova $a_0, a_1, \dots$ za broj x, vidimo da je upravo $p = q$, $a_0 = b_m$, $a_1 = b_{m+1}, \dots$, odakle i sledi naše tvrđenje.

Na taj način je uspostavljena bijekcija između skupa realnih brojeva (uvedenog aksiomatski) i skupa svih decimalnih reprezentacija, opisanih u prethodnom tekstu. Da bi se pokazalo da je ta bijekcija izomorfizam, trebalo bi najpre uvesti operacije sabiranja i množenja i relaciju poretka u skup decimalnih reprezentacija. Na tome se ovde nećemo zadržavati, a čitaoca upućujemo, na primer, na knjigu [24].

Naravno, izbor broja 10 za osnovu našeg sistema zapisivanja sasvim je proizvoljan. Umesto njega mogao se uzeti bilo koji prirodan broj $p > 1$. Tako bi se dobio *sistem sa osnovom p*.

Geometrijska interpretacija

Da bi se strogo dokazalo postojanje bijekcije između skupa $\mathbf{R}$ i skupa tačaka neke prave i na taj način precizno uveo, čitaocu svakako poznat, pojam *brojne ose*, potrebno bi bilo najpre precizno znati šta je to prava, odnosno raspolagati aksiomatikom elementarne geometrije. Na tome se ovde nećemo zadržavati, već ćemo pretpostavljati da je egzistencija takve bijekcije već utvrđena. Tako dobijeni geometrijski model skupa $\mathbf{R}$ koristićemo da bismo lakše zamišljali određene odnose među elementima i podskupovima skupa $\mathbf{R}$. Specijalno, često ćemo se koristiti geometrijskim jezikom koji proističe iz pomenute reprezentacije.

Pod *(otvorenim) intervalom* sa krajevima a i b ($a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$) podrazumevaćemo skup

$$(a, b) = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \,\},$$

a pod *odsečkom* ili *segmentom* sa krajevima a i b podrazumevaćemo skup

$$[a, b] = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \,\}.$$

Takođe ćemo često posmatrati skupove oblika

$$[a, b) = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b \,\},$$
$$(a, b] = \{\, x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b \,\}.$$

Dalje, pod *okolinom* tačke (odnosno broja) $x \in \mathbf{R}$ podrazumevaćemo bilo koji otvoreni interval skupa $\mathbf{R}$ koji tu tačku sadrži. Specijalno, okolinu tačke x oblika

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{\, y \mid |y - x| < \varepsilon \,\}$$

za $\varepsilon > 0$ (v. stav 2.4) zvaćemo *ε-okolinom* tačke x. Naravno, svaka okolina tačke x sadrži neku njenu ε-okolinu, pa je u radu sa okolinama uvek dovoljno posmatrati ε-okoline.

Između tačaka prave (odnosno elemenata skupa R) x i y uvodimo i pojam *rastojanja* formulom

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Nejednakost trougla, dokazana u stavu 2.4, neposredno daje sledeću osobinu rastojanja

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \quad \text{za } x, y, z \in \mathrm{R},$$

koju ćemo često koristiti (i koja se sama takođe naziva *relacijom trougla* iz razloga koji će biti jasni u odeljku 2.9 i u glavi 9).

2.6. PROŠIRENI SKUP REALNIH BROJEVA

Radi jednostavnije formulacije nekih stavova kojima ćemo se baviti korisno je skup R proširiti sa još dva elementa — označavaćemo ih sa $-\infty$ i $+\infty$ (ili samo ∞). Tako dobijamo *prošireni skup realnih brojeva*

$$\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Tačke skupa $\overline{\mathrm{R}}$ različite od $-\infty$ i $+\infty$ zvaćemo *konačnim*. U tom skupu uvešćemo relaciju poretka pomoću $-\infty < x < +\infty$ za svako $x \in \mathrm{R}$ (i, samim tim, $-\infty < +\infty$). Govorićemo o *okolinama* tačaka $+\infty$ i $-\infty$ i pod njima podrazumevati skupove oblika

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid x \geqslant a\} \quad \text{i} \quad (a,+\infty) = \{x \in \mathrm{R} \mid x > a\},$$

odnosno

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathrm{R} \mid x \leqslant b\} \quad \text{i} \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathrm{R} \mid x < b\}.$$

Primetimo da tu malo odstupamo od ranije definicije okoline, jer same tačke $\pm\infty$ ne uključujemo u sopstvene okoline.

Dosad smo znali (teorema 4.1) da svaki neprazan, *odozgo ograničen* skup u R ima supremum. Ako se u skladu sa uvedenim oznakama dogovorimo da za skup $A \subset \mathrm{R}$ koji nije ograničen odozgo kažemo da je $\sup A = +\infty$ (a takođe da je $\sup A = +\infty$ kadgod $+\infty \in A \subset \overline{\mathrm{R}}$), onda, na primer, ta teorema o supremumu može da se formuliše na sledeći način:

Svaki neprazan skup u $\overline{\mathrm{R}}$ *ima supremum.*

2.7. TRI VAŽNE LEME

U ovom odeljku dokazaćemo tri tvrđenja koja ćemo kasnije koristiti pri izvođenju nekih važnih teorema analize. Svako od tih tvrđenja oslanja se bitno na aksiomu neprekidnosti i bez nje se ne može dokazati. Tačan njihov međusobni logički odnos, kao i odnos prema samoj aksiomi (4) i teoremama dokazanim u odeljku 2.4 naveden je u zadatku 19.

Neka su $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathrm{N}$, odsečci realne prave. Ako je ispunjen uslov

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \qquad \text{za sve } n \in \mathrm{N},$$

kazaćemo da je (I_n) niz *umetnutih odsečaka*. Pitanje na koji daje odgovor prva lema glasi: da li svaki niz umetnutih odsečaka na R ima neprazan presek $\bigcap_{n\in\mathrm{N}} [a_n, b_n]$, tj. da li postoji tačka $x \in \mathrm{R}$, takva da je $x \in [a_n, b_n]$ za svako $n \in \mathrm{N}$? Taj odgovor je potvrdan, a odgovarajući stav se obično pripisuje Kantoru* i naziva *principom umetnutih odsečaka*.

LEMA 2.7.1
Svaki niz (I_n) *umetnutih odsečaka na realnoj pravoj ima neprazan presek.*

Dokaz.
Iz pretpostavke o nizu (I_n) neposredno sledi da je $a_m < b_n$ za sve $m, n \in \mathrm{N}$. Na taj način je skup $A = \{a_m \mid m \in \mathrm{N}\}$ ograničen odozgo (bilo kojim od brojeva b_n), te prema teoremi o supremumu postoji $x = \sup A \in \mathrm{R}$. Dokažimo da je upravo taj x element koji pripada svim odsečcima I_n. Kako je x majoranta skupa A, to je $a_n \leqslant x$ za svako $n \in \mathrm{N}$. No i svaki b_n je majoranta skupa A, pa, kako je x najmanja majoranta, važi $x \leqslant b_n$ za sve $n \in \mathrm{N}$. Dakle, $x \in I_n$ za svako $n \in \mathrm{N}$, što je i trebalo dokazati. ■

Dopunsku informaciju o preseku $\bigcap_{n\in\mathrm{N}} I_n$ daje sledeće tvrđenje.

STAV 2.7.1
Ako niz (I_n) *umetnutih odsečaka na* R *ima osobinu da za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n \in \mathrm{N}$, *takvo da je dužina* $|I_n| = b_n - a_n$ *odsečka* I_n *manja od* ε, *tada je* $\bigcap_{n\in\mathrm{N}} I_n$ *jednočlan, tj. postoji tačno jedan* $x \in \mathrm{R}$, *takav da je* $x \in I_n$ *za sve* $n \in \mathrm{N}$.

Dokaz.
Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da pod datim uslovima postoje dve razne tačke x i y koje obe pripadaju $\bigcap_{n\in\mathrm{N}} I_n$. Izaberimo $\varepsilon = |x-y| > 0$. Ako je sada n takvo da je $|I_n| < \varepsilon$, očigledno je da ne može istovremeno biti $x \in I_n$ i $y \in I_n$. Kontradikcija. ■

Da bismo formulisali lemu 2, biće nam potreban sledeći pojam koji ćemo i kasnije često koristiti.

* G. Cantor (1845–1918), nemački matematičar

DEFINICIJA 2.7.1

Za tačku $a \in \overline{\mathbf{R}}$ kažemo da je *tačka nagomilavanja* skupa $A \subset \mathbf{R}$ ako u svakoj okolini tačke a postoji beskonačno mnogo tačaka skupa A, ili, ekvivalentno, ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedna tačka skupa A različita od same tačke a.

PRIMERI 2.7.1

1° Skup $\{ 1/n \mid n \in \mathbf{N} \}$ ima tačno jednu tačku nagomilavanja — tačku 0.

2° Skup $A = (a, b)$ ima za tačke nagomilavanja sve tačke odsečka $[a, b]$.

3° Skup $\mathbf{Q}$ racionalnih brojeva ima za tačke nagomilavanja sve tačke proširene realne prave $\overline{\mathbf{R}}$. To sledi iz posledice 4.2.

4° Konačan podskup u $\mathbf{R}$ nema tačaka nagomilavanja. ▲

LEMA 2.7.2 (Bolcano-Vajerštras*)

Svaki beskonačan ograničen skup u $\mathbf{R}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\mathbf{R}$. Svaki beskonačan skup u $\mathbf{R}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\overline{\mathbf{R}}$.

Dokaz.

Neka je skup $A \subset \mathbf{R}$ beskonačan i ograničen, dakle $A \subset I_0$ za neki odsečak $I_0 = [a, b]$. Posmatrajmo delove na koje središte $(a + b)/2$ odsečka I_0 deli taj odsečak. Jasno je da skup A bar u jednom od tih delova mora imati beskonačno mnogo elemenata — označimo taj deo sa $I_1 = [a_1, b_1]$. Ponavljajući taj postupak dobijamo odsečak I_2 i zatim niz (I_n) odsečaka, od kojih svaki sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa A. Prema dokazanoj lemi 1 taj niz odsečaka ima neprazan presek — neka je x tačka za koju važi $x \in I_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Neka je $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ proizvoljna ε-okolina te tačke ($\varepsilon > 0$). Kako je dužina odsečka I_n jednaka $(b - a)/2^n$, to se n, prema Arhimedovom svojstvu, može izabrati tako da ta dužina bude manja od ε, čime je (zbog $x \in I_n$) obezbeđeno da bude $I_n \subset U$. No, prema načinu izbora odsečaka I_n, odatle sledi da okolina U tačke x sadrži beskonačno mnogo tačaka skupa A. Na taj način je postojanje tačke nagomilavanja skupa A dokazano.

Neka je sada A proizvoljan beskonačan skup u $\mathbf{R}$. Ako je on ograničen, postojanje njegove tačke nagomilavanja upravo je dokazano. Ako je pak neograničen, to, prema definiciji okolina tačaka $+\infty$ i $-\infty$, znači da je bar jedna od tih tačaka njegova tačka nagomilavanja. ■

DEFINICIJA 2.7.2

Neka je $\mathcal{A} = \{ A_i \mid i \in I \}$ proizvoljna familija podskupova nekog skupa X i $B \subset X$. Ako važi $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, tj. ako je svaki element skupa B sadržan bar u jednom od članova te familije, kažemo da je familija $\mathcal{A}$ *pokrivač* skupa B. Ako neka podfamilija $\{ A_j \mid j \in J \}$ za neko $J \subset I$ sama čini pokrivač skupa B, reći ćemo da je ona *potpokrivač* pokrivača $\mathcal{A}$.

Sledeća lema opisuje još jedno važno svojstvo odsečaka realne prave. Ono će u 9. glavi biti pod imenom ***kompaktnost*** uvedeno u tzv. metričkim prostorima.

*B. Bolzano (1781–1848), češki matematičar i filozof, K. Weierstrass (1815–1897), nemački matematičar

LEMA 2.7.3 (Borel-Lebeg*)

Iz svakog pokrivača $\{ U_i \mid i \in I \}$ nekog odsečka $[a, b]$ realne prave (otvorenim) intervalima U_i može se izdvojiti konačan potpokrivač.

Dokaz.

Označimo sa A skup onih tačaka x odsečka $[a, b]$ koje imaju osobinu da se odsečak $[a, x]$ može pokriti sa konačno mnogo intervala U_i. Taj skup nije prazan — na primer, sama tačka a mu očigledno pripada jer je, po pretpostavci, sadržana bar u jednom od intervala U_i. Naš zadatak je da dokažemo da i tačka b pripada skupu A.

Kako je $A \subset [a, b]$ i $A \neq \emptyset$, to prema teoremi o supremumu postoji $y = \sup A$ i očigledno je $y \leqslant b$. Kao i svaka tačka odsečka $[a, b]$ i tačka y pripada nekom intervalu $U_i = (\alpha, \beta)$, tj. $\alpha < y < \beta$. Po svojstvu supremuma, za neko $x \in A$ je $\alpha < x \leqslant y$. Odsečak $[a, x]$ pokriven je sa konačno mnogo članova date familije — ako im pridružimo izabrani odsečak U_i, dobićemo konačan pokrivač odsečka $[a, y]$, čime smo dokazali da $y \in A$.

Pri tom je jasno da ne može biti $y < b$, inače bi se između y i β našle tačke skupa A (zašto?), suprotno izboru tačke y kao (najmanje) majorante skupa A. Na taj način je dokazano da je $b = y \in A$ i odsečak $[a, b]$ se može pokriti sa konačno mnogo intervala U_i. ■

Primetimo na kraju da se pretpostavke o zatvorenosti odsečaka I_n u lemi 1, zatvorenosti odsečka $[a, b]$ i otvorenosti intervala U_i u lemi 3 ne smeju izostaviti, a da te leme ostanu na snazi. Neke jednostavne primere koji to pokazuju treba konstruisati u zadacima 17 i 18.

2.8. KARDINALNI BROJEVI. PREBROJIVI I NEPREBROJIVI SKUPOVI

Kada treba ispitati da li dva konačna skupa imaju isti broj elemenata, najjednostavnije je izbrojati koliko elemenata ima u svakom od tih skupova. Međutim, može se postupiti i na drugi način — pokušati da se uspostavi uzajamno jednoznačna korespondencija (bijekcija) između tih skupova. Upravo ovakav način upoređivanja „brojnosti" skupova može se preneti na beskonačne skupove.

DEFINICIJA 2.8.1

Za skupove A i B kažemo da su *ekvivalentni* ili da *imaju istu moć* ako postoji bijekcija $f: A \to B$.

Neposredno se proverava da je upravo uvedena relacija među skupovima relacija ekvivalencije (čime je i opravdan njen naziv). Kod konačnih skupova za karakteristiku klase međusobno ekvivalentnih skupova uzimamo broj njihovih elemenata. Kad su u pitanju beskonačni skupovi, tu karakteristiku nazivaćemo *kardinalnim brojem*. Dakle, po definiciji važi

$$\operatorname{card} A = \operatorname{card} B \iff A \text{ i } B \text{ imaju istu moć.}$$

* E. Borel (1871–1956), H. Lebesgue (1875–1941), francuski matematičari

Da kod beskonačnih skupova situacija nije tako jednostavna kao kod konačnih, pokazaćemo na sledećih nekoliko primera.

PRIMERI 2.8.1

1° Skup N prirodnih i skup P parnih brojeva imaju istu moć. Zaista, funkcija $f\colon \mathrm{N} \to P$, data sa $f(n) = 2n$, jeste bijekcija.

2° Slično, skupovi N i Z su ekvivalentni (proveriti!). ▲

Na taj način, kod beskonačnih skupova može se dogoditi da skup bude ekvivalentan nekom svom pravom podskupu. To svojstvo se u strogom zasnivanju teorije skupova obično uzima za definiciono svojstvo beskonačnih skupova.

PRIMER 2.8.2

Skup N i skup racionalnih brojeva intervala $(0, 1]$ imaju istu moć. Zaista, zapišimo sve racionalne brojeve iz $(0, 1]$ u tablicu

$$\begin{array}{llll} 1/1 & & & \\ 1/2 & 2/2 & & \\ 1/3 & 2/3 & 3/3 & \\ 1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 \\ \ldots\ldots & & & \end{array}$$

Ako u toj tablici, idući s leva udesno i odozgo nadole, prvo precrtamo svaki broj koji se prethodno već javio, dobijamo sve racionalne brojeve iz $(0, 1]$ poređane u niz, čime je tražena bijekcija uspostavljena. ▲

Iz navedenih primera mogli smo zaključiti da su mnogi važni beskonačni skupovi ekvivalentni skupu prirodnih brojeva N, kao i da postoji jednostavan način da se proveri da li tako nešto važi. Zato je prirodno takvim skupovima dati posebno ime.

DEFINICIJA 2.8.2

Kažemo da je skup A *prebrojiv* ako je ekvivalentan skupu N, odnosno ako se njegovi elementi mogu (bez ponavljanja) poređati u niz. Za skup za koji znamo da je konačan ili prebrojiv kažemo da je *najviše prebrojiv*.

Naravno, uvedeni pojmovi imaju smisla samo onda ako postoje i beskonačni skupovi koji nisu prebrojivi. To i tvrdi

STAV 2.8.1

Skup realnih brojeva iz intervala $(0, 1)$ nije prebrojiv.

Dokaz.

Pretpostavimo, suprotno od onog što dokazujemo, da se skup svih realnih brojeva iz $(0, 1)$ može poređati u niz $a_1, a_2, \ldots$ i neka su

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots, \\ a_2 &= 0, a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= 0, a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

njihove decimalne reprezentacije. Izaberimo cifre b_n na sledeći način:

$$b_n = \begin{cases} 2, & \text{ako je } a_{nn} = 1, \\ 1, & \text{ako je } a_{nn} \neq 1. \end{cases}$$

Očigledno je da broj $b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ pripada intervalu $(0, 1)$, no on se ne može poklopiti ni sa jednim od brojeva $a_1, a_2, \ldots$, jer se od svakog od njih razlikuje bar u jednoj decimali. Na taj način, pretpostavka da su *svi* brojevi skupa $\mathbf{R} \cap (0, 1)$ poređani u niz dovela je do kontradikcije. ■

Primetimo da iz ovog tvrđenja i primera 2 sledi postojanje iracionalnih brojeva.

PRIMER 2.8.3

Skup R realnih brojeva ekvivalentan je bilo kom svom otvorenom intervalu. Zaista, funkcija $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ uspostavlja bijekciju između R i intervala $(-1, 1)$. Da su bilo koja dva konačna intervala realne prave međusobno ekvivalentna dokazuje se konstrukcijom odgovarajuće linearne funkcije. ▲

Upoznajmo se malo detaljnije sa osobinama prebrojivih skupova.

STAV 2.8.2

Unija najviše prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Dokaz.

Pretpostavimo prvo da je dato konačno mnogo skupova $A_1, A_2, \ldots, A_k$ koji su prebrojivi:

$$\begin{array}{l} A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}, \\ \quad\downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}, \\ \quad\downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad\downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots\}. \end{array}$$

Tada se članovi skupa $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ređaju u niz po pravilu označenom strelicama (pošto se prethodno odstrane elementi koji se eventualno ponavljaju). Ako skupova A_i ima prebrojivo mnogo:

$$\begin{array}{l} A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}, \\ \quad\nearrow\ \nearrow \\ A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}, \\ \quad\nearrow\ \nearrow \\ A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

postupak je „dijagonalan", kao u navedenoj tablici. ■

PRIMER 2.8.4
Kako je skup Q racionalnih brojeva prebrojiva unija skupova oblika

$$(n, n+1] \cap \mathrm{Q}, \quad n \in \mathrm{Z},$$

to iz prethodnog stava i primera 2 sledi da je $\operatorname{card} \mathrm{Q} = \operatorname{card} \mathrm{N}$. Kombinujući ovaj rezultat sa primerom 3 i stavom 2 zaključujemo da je skup $\mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$ iracionalnih brojeva neprebrojiv. ▲

STAV 2.8.3
Ako je B prebrojiv skup i $A \subset B$, tada je skup A najviše prebrojiv. ■

STAV 2.8.4
Ako je B bilo koji beskonačan skup, tada postoji njegov podskup A koji je prebrojiv.

Dokaz.
Skup B nije prazan, pa postoji $a_1 \in B$. Skup $B \setminus \{a_1\}$ nije prazan (inače bi B bio konačan), pa postoji $a_2 \in B \setminus \{a_1\}$. Slično dolazimo do ostalih elemenata skupa $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$. ■

Poslednja dva stava navode na misao da je skup N u nekom smislu „najmanji" među beskonačnim skupovima. Taj pojam se precizira sledećom definicijom.

DEFINICIJA 2.8.3
Kažemo da skup A ima moć, *ne veću* od moći skupa B i pišemo

$$\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$$

ako je skup A ekvivalentan nekom podskupu skupa B.

Očigledno je da važi

STAV 2.8.5
Za skupove A i B sledeća tri tvrđenja su međusobno ekvivalentna:
1° $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$;
2° *postoji injekcija* $f: A \to B$;
3° *postoji surjekcija* $g: B \to A$. ■

Sledeća osobina uvedene relacije $\leqslant$ među kardinalnim brojevima očekivana je, ali netrivijalna za dokaz. On se može naći, na primer, u knjigama [1], [7] citirane literature.

STAV 2.8.6
Relacija $\leqslant$ među kardinalnim brojevima jeste relacija totalnog poretka. ■

Kao i obično kod relacija poretka, pisaćemo $\operatorname{card} A < \operatorname{card} B$ ako je $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B$ i $\operatorname{card} A \neq \operatorname{card} B$.

PRIMER 2.8.5
Prema stavu 1 je $\operatorname{card} \mathrm{N} < \operatorname{card}(\mathrm{R} \cap (0,1))$ i, tim pre, $\operatorname{card} \mathrm{N} < \operatorname{card} \mathrm{R}$. ▲

Dakle, među beskonačnim skupovima dosad poznajemo dva različita kardinalna broja — kardinalni broj prebrojivih skupova i kardinalni broj skupova koji imaju moć kao skup realnih brojeva. Za ove poslednje kažemo da imaju *moć kontinuuma*. Da beskonačnih brojeva ima neograničeno mnogo, sledi iz narednog stava koji je, kao i veći deo dosad navedenih, dokazao Kantor, tvorac teorije skupova.

STAV 2.8.7
Za proizvoljan skup A važi

$$\operatorname{card} A < \operatorname{card} \mathcal{P}A,$$

gde je $\mathcal{P}$ oznaka za partitivni skup.

Dokaz.
Tvrđenje $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} \mathcal{P}A$ je trivijalno, te je samo potrebno da dokažemo da ne može biti $\operatorname{card} A = \operatorname{card} \mathcal{P}A$. Pretpostavimo suprotno — da postoji bijekcija $f: A \to \mathcal{P}A$. Označimo sa X sledeći skup:

$$X = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \}.$$

Kako je $X \subset A$, to je $X \in \mathcal{P}A$, pa, kako je funkcija f surjektivna, postoji $a \in A$, takav da je $f(a) = X$. Na osnovu definicije skupa X odmah sledi

$$a \in X \iff a \notin X,$$

što je, naravno, kontradikcija. ■

Pomenimo da za skupove N i R važi sledeća zanimljiva veza:

$$\operatorname{card} \mathrm{R} = \operatorname{card} \mathcal{P}\mathrm{N}.$$

Dokaz ostavljamo za zadatak 27.

Pitanje koje se odmah nameće jeste da li postoji neki kardinalni broj koji bi se nalazio strogo između kardinalnog broja prebrojivih skupova i kardinalnog broja moći kontinuuma. Pretpostavka da je odgovor na to pitanje odrečan nazvano je *kontinuum-hipotezom*. Šezdesetih godina ovog veka dokazano je (Koen*) da ta hipoteza ne može biti ni dokazana ni opovrgnuta u okviru poznatih aksiomatskih sistema teorije skupova.

2.9. KOMPLEKSNI BROJEVI

Polje $(\mathrm{R}, +, \cdot)$ realnih brojeva ima osobinu da je u njemu moguće „vaditi" korene iz svih nenegativnih elemenata, tj. moguće je rešavati jednačine oblika $x^n - a = 0$ za $a > 0$ i $n \in \mathrm{N}$. Međutim, to još ne znači da svaka jednačina oblika $P(x) = 0$, gde je P polinom, ima rešenja u skupu R — najjednostavnija koja nema rešenja u R je jednačina $x^2 + 1 = 0$. Da bi bilo moguće rešavanje takvih jednačina, mora se polje R proširiti novim elementima. Tako dolazimo do polja kompleksnih brojeva.

* P. Cohen (1934–), američki matematičar

DEFINICIJA 2.9.1

Skup C *kompleksnih brojeva* je skup $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ svih uređenih parova realnih brojeva u kome se sabiranje i množenje uvode pomoću

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Komponenta x para $z = (x, y)$ naziva se *realnim*, a komponenta y *imaginarnim delom* broja z. Označava se $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

STAV 2.9.1

1° $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ *je polje.*

2° *Funkcija* $x \mapsto (x, 0)$ *je izomorfizam polja* $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ *na potpolje* $\{(x, 0) \mid x \in \mathbf{R}\}$ *polja* $(\mathbf{C}, +, \cdot)$.

Dokaz.

Detalje dokaza ostavljamo za zadatak 29. Pomenimo samo da je neutralni element sabiranja par $(0, 0)$, suprotni element paru (x, y) par $(-x, -y)$, jedinični element množenja par $(1, 0)$, a inverzni element para (x, y) (za $x^2 + y^2 \neq 0$) par $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$. ■

Dakle, polje $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ se može shvatiti kao proširenje polja $(\mathbf{R}, +, \cdot)$. Da u njemu zaista jednačina $x^2 + 1 = 0$ ima rešenja biće jasno posle naredne definicije.

DEFINICIJA 2.9.2

$i = (0, 1)$.

STAV 2.9.2

1° $i^2 = -1$.

2° *Svaki kompleksan broj se može napisati u obliku* $z = x + iy$, *gde je* $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. ■

Ono što je bitno, to je da smo na ovaj način došli do polja u kome postoje rešenja *svih* jednačina oblika $P(z) = 0$. To tvrdi sledeća *osnovna teorema algebre*, čiji dokaz izlazi van okvira ove knjige.

TEOREMA 2.9.1

Za svaki polinom $P(z)$ *sa kompleksnim koeficijentima, stepena većeg od nule, postoji kompleksan broj* z, *takav da je* $P(z) = 0$. ■

Neke posledice ove teoreme koristićemo u 7. glavi.

U radu s kompleksnim brojevima korisna su i sledeća dva pojma.

DEFINICIJA 2.9.3

Ako je $z = x + iy \in \mathbf{C}$, njemu *konjugovano kompleksan* je broj $\overline{z} = x - iy$.

STAV 2.9.3

Za sve $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *važi:*

1° $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

2° $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

3° $\overline{\overline{z}} = z$,

4° $z = \overline{z} \iff z \in \mathbf{R}$,

5° $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$,

6° $z \cdot \overline{z} \geqslant 0$. ■

DEFINICIJA 2.9.4

Pod *modulom* kompleksnog broja $z = x + iy$ podrazumeva se $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

STAV 2.9.4

Za sve $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ *važi:*

1° $|z| = |\overline{z}|$,

2° $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,

3° $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

4° $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Dokaz.

Dokazaćemo samo tvrđenje 4°. Na osnovu već izvedenih osobina imamo

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{z_1}z_2) + |z_2|^2. \end{aligned}$$

Na osnovu nejednakosti $\operatorname{Re} z \leqslant |z|$ (koja sledi iz definicije), dalje imamo

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &\leqslant |z_1|^2 + 2|\overline{z_1}z_2| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Time je nejednakost 4° dokazana. ■

Kao što znamo, skup $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ možemo shvatiti kao ravan u kojoj su uvedene pravougle koordinate. Dakle, kompleksne brojeve možemo shvatiti kao tačke tzv. *kompleksne ravni*. Takođe, svakom kompleksnom broju može se pridružiti vektor sa početkom u koordinatnom početku i krajem u odgovarajućoj tački kompleksne ravni. Lako je proveriti da se tada operacije sabiranja i oduzimanja kompleksnih brojeva mogu izvoditi po pravilima vektorske algebre. Takođe, modul kompleksnog broja je jednostavno intenzitet odgovarajućeg vektora.

Jednostavnu geometrijsku interpretaciju ima i izraz

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Lako je videti da on predstavlja *rastojanje* između kompleksnih brojeva (odnosno tačaka) z_1 i z_2. Upravo dokazano svojstvo 4° iz stava 4 može se prepisati u obliku

$$d(z_1, z_3) \leqslant d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \qquad \text{za sve } z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}.$$

U toj formuli prepoznajemo *nejednakost trougla*, pomenutu za realne brojeve u odeljku 2.5. Geometrijski smisao tog termina sada je jasan.

Nešto više o kompleksnim brojevima i njihovoj geometrijskoj interpretaciji reći ćemo u odeljku 4.4, posle uvođenja trigonometrijskih funkcija realne promenljive.

ZADACI

1. Dokazati da je $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$ za 1° $x, y \in \mathbf{R}$; 2° $x, y \in \mathbf{C}$.

2. Dokazati sledeće osobine induktivnih skupova:
   1° **Z** i **Q** su induktivni skupovi.
   2° Svaki induktivan skup je neograničen odozgo.
   3° Svaki induktivan skup je beskonačan.

3. U svakom nepraznom, odozgo ograničenom skupu prirodnih brojeva postoji maksimalni element. Dokazati.

4. Dokazati indukcijom tvrđenja na stranama 27 i 28.

5. Dokazati indukcijom: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$, $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n-1}{q-1}$ za $q \neq 1$.

6. Dokazati *Bernulijevu* nejednakost*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad \text{za } x > -1,\ n \in \mathbf{N},$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

7. Dokazati *binomnu formulu*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

gde je binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ definisan sa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

8. 1° Ako je $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbf{R}$, dokazati da je $\sup A \leqslant \sup B$ i $\inf A \geqslant \inf B$.
   2° Ako je $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$, $\emptyset \neq B \subset \mathbf{R}$ i $x \leqslant y$ za sve $x \in A$, $y \in B$, dokazati da je $\sup A \leqslant \inf B$.

9. Za $A, B \subset \mathbf{R}$ definišimo $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Dokazati:
   1° $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$;
   2° $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$ ako je $x \geqslant 0$ za sve $x \in A \cup B$.

10. Za $A \subset \mathbf{R}$ označimo $-A = \{-a \mid a \in A\}$. Dokazati da je $\sup(-A) = -\inf A$.

11. Za dati realan broj x označimo $A_x = \{y \in \mathbf{Q} \mid y \leqslant x\}$, $B_x = \{y \in \mathbf{Q} \mid y \geqslant x\}$. Dokazati da je $\sup A_x = \inf B_x = x$.

* J. Bernoulli (1654–1705), švajcarski matematičar

12. Dokazati sledeće osobine funkcije „ceo deo“:
   1° $[x] + [y] \leqslant [x+y] \leqslant [x] + [y] + 1$;
   2° za $x, y \geqslant 0$ važi $[x][y] \leqslant [xy] \leqslant [x][y] + [x] + [y]$;
   3° $\big[[x]/n\big] = [x/n]$ za $n \in \mathbf{N}$.

13. Dokazati sledeće osobine korena, odnosno stepena sa racionalnim izložiocem ($a, b > 0$; $m, n \in \mathbf{N}$; $r, r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$):
   1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;
   2° $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$, $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$, $(ab)^r = a^r b^r$.

14. Dokazati:
   1° $x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $y \notin \mathbf{Q} \implies x + y,\ xy \notin \mathbf{Q}$;
   2° $x, y,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbf{Q} \implies \sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$;
   3° $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{b} \notin \mathbf{Q}$, $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d} \implies a = c, b = d$.

15. 1° Dokazati da niz umetnutih poluzatvorenih intervala $\left[a - \frac{1}{10^n}, a\right)$, $n \in \mathbf{N}$, ima prazan presek.
   2° Dokazati da u decimalnoj reprezentaciji formiranoj u odeljku 2.5 nijedan realan broj ne može imati sve cifre počev od neke jednake 9.

16. Dokazati da je decimalni zapis realnog broja periodičan ako i samo ako je taj broj racionalan.

17. Dokazati da presek niza umetnutih otvorenih ili poluotvorenih intervala može biti prazan.

18. Dokazati:
   1° Iz familije odsečaka koja pokriva neki odsečak ne može uvek da se izdvoji konačan potpokrivač.
   2° Isto važi za familiju intervala koja pokriva interval.
   3° Isto važi za familiju odsečaka koja pokriva interval.

19. (a) Dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna u svakom uređenom polju:
   1° aksioma (4);
   2° teorema o supremumu 4.1;
   3° konjunkcija Arhimedovog svojstva (teorema 4.2) i principa umetnutih odsečaka (lema 7.1);
   4° Bolcano-Vajerštrasovo svojstvo (lema 7.2);
   5° Borel-Lebegovo svojstvo (lema 7.3).
   (b) Pokazati da postoji uređeno polje sa Arhimedovim svojstvom u kojem ne važi princip umetnutih odsečaka, kao i uređeno polje u kojem važi princip umetnutih odsečaka, ali koje nema Arhimedovo svojstvo. [Za poslednji primer videti npr. [10].]

20. *Dedekindovom* aksiomom* naziva se sledeće tvrđenje: ako su A i B neprazni podskupovi uređenog polja X, takvi da je $A \cup B = X$ i $x < y$ za sve $x \in A$, $y \in B$, tada ili postoji $\max A$ ili postoji $\min B$. Dokazati da je Dedekindova aksioma ekvivalentna svakom od tvrđenja 1°–5° iz prethodnog zadatka.

* R. Dedekind (1831–1916), nemački matematičar

21. Dokazati: 1° unija beskonačnog skupa A i najviše prebrojivog skupa B je skup čija je moć ista kao i skupa A; 2° kardinalni broj neprebrojivog beskonačnog skupa A se ne menja ako mu oduzmemo najviše prebrojiv skup B.

22. Realan broj x naziva se *algebarskim* ako postoji polinom $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ sa racionalnim (ili, ekvivalentno, s celim) koeficijentima a_i čiji je x koren. Realan broj koji nije algebarski naziva se *transcendentnim*. Dokazati:
1° polinoma sa racionalnim koeficijentima ima prebrojivo mnogo;
2° algebarskih brojeva ima prebrojivo mnogo;
3° postoje transcendentni brojevi; štaviše, ima ih neprebrojivo mnogo.

23. Dokazati: 1° $\operatorname{card} \mathbf{N}^k = \operatorname{card} \mathbf{N}$ za $k \in \mathbf{N}$; 2° $\operatorname{card} \mathbf{R}^k = \operatorname{card} \mathbf{R}$ za $k \in \mathbf{N}$.

24. Dokazati da je svaka familija disjunktnih intervala iz $\mathbf{R}$ najviše prebrojiva.

25. Dokazati stav 8.5.

26. Dokazati da je skup svih konačnih podskupova prebrojivog skupa prebrojiv.

27. Dokazati: 1° skup svih strogo rastućih nizova prirodnih brojeva ekvivalentan je skupu svih dijadskih razlomaka (tj. brojeva oblika $0, \alpha_1\alpha_2\ldots$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$).
2° $\operatorname{card} \mathcal{P}\mathbf{N} = \operatorname{card} \mathbf{R}$.

28. Skup svih funkcija $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ ima moć koja je strogo veća od moći kontinuuma. Dokazati.

29. Dokazati stav 9.1.

30. Dokazati da je u polju $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ nemoguće definisati relaciju poretka $\leqslant$ tako da važe aksiome (3.1)–(3.6).

31. Dokazati stavove 9.3 i 9.4.

32. U kompleksnoj ravni prikazati skupove tačaka z za koje važi:
1° $|z - a| = b$, $a \in \mathbf{C}$, $b \geqslant 0$; 2° $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;
3° $|z - 1| + |z + 1| \leqslant 3$.

33. Koja transformacija ravni $\mathbf{C}$ je data funkcijom $z \mapsto \overline{z}$?

34. Dokazati *Koši-Švarcovu* nejednakost*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \qquad \text{za } a_i, b_i \in \mathbf{C}.$$

*A. L. Cauchy (1789–1857), francuski matematičar, K. H. A. Schwarz (1843–1921), nemački matematičar

3. NIZOVI

Pojam niza već smo koristili u prethodnoj glavi. Precizirajmo ga sada.

DEFINICIJA

Pod *nizom* elemenata skupa A podrazumevamo svaku funkciju $a\colon \mathbf{N} \to A$. Vrednost $a(n)$ funkcije a u tački $n \in \mathbf{N}$ označavamo sa a_n i zovemo *n-tim članom* tog niza, a sam niz označavamo sa $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ili (a_n).

U ovoj glavi bavićemo se isključivo nizovima realnih brojeva. Neka svojstva takvih nizova moći će da se posmatraju i u opštijim situacijama — o tome ćemo govoriti u glavi 9.

3.1. LIMES NIZA. OSOBINE

Pojam granične vrednosti (limesa) je osnovni u čitavoj analizi. Za niz realnih brojeva on se definiše na sledeći način.

DEFINICIJA 3.1.1

Za tačku $a \in \overline{\mathbf{R}}$ kažemo da je *limes** ili *granična vrednost* niza (a_n) realnih brojeva i pišemo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ako za svaku okolinu U tačke a postoji prirodan broj n_0, takav da je $a_n \in U$ za sve prirodne brojeve n veće od n_0. Dakle,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff (\forall U)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n \in U).$$

U tom slučaju još kažemo da niz (a_n) *teži ka* a *kad* n *teži* ∞ i pišemo $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. U slučaju kada je a konačan broj, za niz (a_n) kažemo da je *konvergentan* (ili da *konvergira ka* a), a u slučaju kada je $a = \pm\infty$ ili da granična vrednost ne postoji, kažemo da niz (a_n) *divergira*.

Uzimajući u obzir definicije okolina konačnih i beskonačnih elemenata skupa $\overline{\mathbf{R}}$, uslov dat u definiciji može se protumačiti na sledeće načine.

Ako je $a \in \mathbf{R}$, tada

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

* limes (lat.) – granica

Dakle, niz (a_n) teži ka a ako su mu članovi a_n „proizvoljno blizu" broju a čim je n „dovoljno veliko". Još se kaže da se u tom slučaju u svakoj okolini tačke a nalaze *svi članovi niza počev od nekog* ili *skoro svi članovi* niza (tj. svi osim njih konačno mnogo).

Ako je $a = +\infty$, tada

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff (\forall M \in \mathbf{R})(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Slično se može „dešifrovati" uslov $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

PRIMERI 3.1.1

1° $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, jer na osnovu Arhimedovog svojstva (posledica 2.4.1) za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, takvo da je $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, pa je tim pre i $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ za sve $n > n_0$.

2° $\lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 1$, jer je $\left|\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] - 1\right| = \frac{1}{n}$.

3° Neka je $a_n = q^n$, $q \in \mathbf{R}$. Dokažimo: (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ za $|q| < 1$; (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ za $q = 1$; (c) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ za $q > 1$; (d) $\lim_{n\to\infty} a_n$ ne postoji za $q \leqslant -1$.

(a) Neka je $0 < q < 1$. Tada je $q = 1/(1+h)$ za neko $h > 0$. Iz Bernulijeve nejednakosti (v. zadatak 2.6) dobijamo

$$q^n < \frac{1}{1+nh} < \frac{1/h}{n}$$

i tvrđenje sledi slično kao u primeru 1°. Slučaj $-1 < q < 0$ razmatra se analogno.

(c) Ako je $q > 1$, tada je $0 < 1/q < 1$. Neka je $M > 0$ proizvoljno. Na osnovu (a) imamo $0 < (1/q)^n < 1/M$ za dovoljno veliko n, pa je $q^n > M$ za dovoljno veliko n.

(d) Ako je $q < -1$, za sve parne n biće $q^n > M$, a za sve neparne n, $q^n < -M$, gde je $M > 0$ proizvoljno, a n dovoljno veliko. Na taj način, postoji beskonačno mnogo članova niza van svake okoline bilo kog elementa $a \in \overline{\mathbf{R}}$. ▲

Prelazeći na osobine graničnih vrednosti, dokažimo najpre sledeća dva jednostavna stava.

STAV 3.1.1

Ako niz ima graničnu vrednost, ona je jednoznačno određena.

Dokaz.

Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da neki niz (a_n) ima dve granične vrednosti a i b i neka su, na primer, obe konačne. Ako izaberemo $\varepsilon = |a-b|/2$, jasno je da se ε-okoline tačaka a i b ne seku, pa je očigledno nemoguće da i u jednoj i u drugoj budu skoro svi članovi niza (a_n). ■

STAV 3.1.2

Svaki konvergentan niz je ograničen.

Dokaz.

Po definiciji, konvergentan niz (a_n) ima *konačnu* graničnu vrednost a. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ izaberimo $n_0 \in \mathbf{N}$, tako da važi $|a_n - a| < \varepsilon$ za sve $n > n_0$. Među konačno mnogo brojeva

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a+\varepsilon, a-\varepsilon$$

izaberimo onaj koji ima najveću apsolutnu vrednost M. Tada je $|a_n| \leqslant M$ za sve $n \in \mathbf{N}$, tj. niz (a_n) je ograničen. ■

Naravno, obrat ovog stava ne važi — v. primer 1.3° za $q = -1$.

Za izvođenje daljih osobina realnih nizova biće nam koristan sledeći pojam.

DEFINICIJA 3.1.2

Ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, kažemo da je (x_n) *nula-niz*.

STAV 3.1.3

1° $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *gde je* a *konačan realan broj, ako i samo ako je* $a_n = a + x_n$, *gde je* (x_n) *nula-niz*.

2° *Zbir i razlika dva nula-niza su nula-nizovi.*

3° *Proizvod ograničenog niza i nula-niza je nula-niz.*

Dokaz.

1° Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, označimo $x_n = a_n - a$. Tada je $|x_n| = |a_n - a| < \varepsilon$ za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i dovoljno veliko n, pa je (x_n) nula-niz. Obrnuto je takođe jednostavno.

2° Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Izaberimo $n_1 \in \mathbf{N}$, takav da je $|x_n| < \varepsilon/2$ za $n > n_1$ i $n_2 \in \mathbf{N}$, takav da je $|y_n| < \varepsilon/2$ za $n > n_2$. Označimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tada je za $n > n_0$ očigledno $|x_n \pm y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

3° Neka je $|x_n| < M$ za sve n i $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo n_0 tako da je $|y_n| < \varepsilon/M$ za $n > n_0$. Tada će biti i $|x_n y_n| < M(\varepsilon/M) = \varepsilon$ za $n > n_0$. ■

Sledeći stav daje jednostavnu vezu između algebarskih operacija u skupu $\mathbf{R}$ i graničnog prelaza.

STAV 3.1.4

Neka su (a_n) *i* (b_n) *konvergentni nizovi realnih brojeva i neka je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Tada je*

1° $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2° $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3° $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ *ako je* $b_n \neq 0$ *za sve* $n \in \mathbf{N}$ *i* $b \neq 0$.

Dokaz.

Prema prethodnom stavu, $a_n = a + x_n$, $b_n = b + y_n$, gde su (x_n) i (y_n) nula-nizovi. Odatle:

1° $a_n \pm b_n = (a \pm b) + (x_n \pm y_n) \to a \pm b$ $(n \to \infty)$, jer je $(x_n \pm y_n)$ takođe nula-niz.

2° $a_n b_n = ab + (ay_n + bx_n + x_n y_n) \to ab$ $(n \to \infty)$, jer je izraz u zagradi član nekog nula-niza, prema stavovima 2 i 3.

3° Važi

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + x_n}{b + y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b \cdot b_n}(bx_n - ay_n).$$

U narednom stavu dokazaćemo da za niz (b_n) koji ima graničnu vrednost $b \neq 0$ važi da je $|b_n| > r$ za pogodno odabrano $r > 0$ ako je n dovoljno veliko. Zato je $|1/(b \cdot b_n)| < 1/|b|r$, tj. niz $(1/(b \cdot b_n))$ je ograničen. Kako je niz $(bx_n - ay_n)$ nula-niz, to je i niz $(a_n/b_n - a/b)$ nula-niz, što je i trebalo dokazati. ■

U prethodnom dokazu koristili smo mali „trik" koji ćemo i kasnije često koristiti, pa ćemo ga obično i prećutno podrazumevati u formulacijama i dokazima nekih stavova. Naime, s obzirom na definiciju limesa, kada radimo sa graničnim vrednostima nije uvek neophodno da odgovarajuće osobine nizova koje koristimo budu ispunjene *za svako* $n \in \mathbf{N}$ — dovoljno je da one važe *počev od nekog* $n_0 \in \mathbf{N}$.

U tom smislu, na primer, formulacija upravo dokazanog tvrđenja 3° mogla bi da glasi „$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b$ ako je $b \neq 0$", jer uslov „$b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbf{N}$" bi mogao da se zameni uslovom „$b_n \neq 0$ počev od nekog n", a ovaj poslednji je posledica uslova $b \neq 0$, kao što ćemo odmah videti. (Pri tom, dakle, čak ne zahtevamo da a_n/b_n bude definisano za svako n, a ipak govorimo o njegovom limesu.)

Pređimo na osobine limesa koje su u vezi sa relacijom poretka u $\mathbf{R}$. Prvo navodimo onu koju smo upravo koristili u prethodnom dokazu.

STAV 3.1.5

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ *i* $a < b$, *tada je* $a_n < b_n$ *počev od nekog* n. *Specijalno, ako je* $\lim_{n\to\infty} a_n = a < b$, *onda je* $a_n < b$ *počev od nekog* n. *Analogno važi kada se znak* $<$ *zameni znakom* $>$.

Dokaz.

Neka su, na primer, $a, b \in \mathbf{R}$. Izaberimo $\varepsilon = |a - b|/2$. Svi članovi niza (a_n), počev od nekog, nalaze se u ε-okolini tačke a, a svi članovi niza (b_n), počev od nekog, nalaze se u ε-okolini tačke b. Kako je prva od tih okolina na brojnoj osi „levo" od druge, to je i $a_n < b_n$, počev od nekog n. ■

Obrat ovog tvrđenja ne važi u opštem slučaju, već važi samo sledeće tvrđenje.

STAV 3.1.6

Ako je za sve n *(ili počev od nekog* n*)* $a_n \leqslant b_n$ *i nizovi* (a_n) *i* (b_n) *imaju limes, tada je i* $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$. *Analogno važi kada se znak* $\leqslant$ *zameni znakom* $\geqslant$.

Dokaz.

Ako bi bilo $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$, iz prethodnog stava bi sledilo $a_n > b_n$, počev od nekog n, suprotno pretpostavci. ■

U ovom stavu, dakle, čak i ako je $a_n < b_n$ za sve n, ne znači da će biti $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$. Zaista, važi $0 < 1/n$ za sve n, ali $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Sledeće tvrđenje često koristimo u zadacima.

STAV 3.1.7

Neka su (a_n), (b_n), (c_n) *tri niza realnih brojeva, takva da je:*

1° $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *za sve* $n \in \mathbf{N}$ *(ili počev od nekog* n*);*

2° $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a \in \overline{\mathbf{R}}$.

Tada je i $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Dokaz.

Neka je U proizvoljna okolina tačke a. Tada za n veće od nekog $n_1 \in \mathbf{N}$ važi $a_n \in U$, a za n veće od nekog $n_2 \in \mathbf{N}$ važi $c_n \in U$. Kako svaka okolina U bilo konačne, bilo beskonačne tačke a ima osobinu da

$$a_n \in U,\ c_n \in U,\ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \implies b_n \in U,$$

to zaključujemo da $b_n \in U$ za sve $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Dakle, $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

Evo nekih primera primene ovog tvrđenja.

PRIMERI 3.1.2

1° $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ za $a > 0$.

Pretpostavimo najpre da je $a > 1$ i označimo $a_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Tada je

$$a = (1 + a_n)^n > na_n,$$

odakle $0 < a_n < a/n$, pa kako $a/n \to 0$ $(n \to \infty)$, to i $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Ako je $0 < a < 1$, tada je $1/a > 1$, pa, prema prethodnom, $\sqrt[n]{1/a} \to 1$ $(n \to \infty)$. Koristeći pravilo o limesu količnika imamo $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{1/a} \to 1/1 = 1$ $(n \to \infty)$.

2° $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Neka je, slično kao malopre, $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ (za $n > 1$). Koristeći se binomnim razvojem u kojem su svi sabirci pozitivni, imamo

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Odatle $0 < a_n^2 < 2/(n-1) \to 0$ $(n \to \infty)$, dakle i $a_n^2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Prema zadatku 1 imamo i $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$. ▲

3.2. PODNIZOVI. TAČKE NAGOMILAVANJA. GORNJI I DONJI LIMES

DEFINICIJA 3.2.1

Neka je $n : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *strogo rastući* niz prirodnih brojeva, tj. neka je

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

i neka je $a : \mathbf{N} \to A$ niz elemenata skupa A. Za niz $a \circ n : \mathbf{N} \to A$ sa članovima a_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ kažemo da je *podniz* niza (a_n).

Neposredno iz definicije je jasno da važi

STAV 3.2.1

Ako niz (a_n) realnih brojeva ima graničnu vrednost a, tada i bilo koji njegov podniz (a_{n_k}) ima graničnu vrednost a. ■

Obrnuto, ako *jedan* podniz (a_{n_k}) niza (a_n) ima graničnu vrednost, sam niz (a_n), naravno, ne mora je imati — jednostavan primer niza $a_n = (-1)^n$ pokazuje da mogu postojati konvergentni podnizovi (u ovom slučaju $a_{2k} = 1$ i $a_{2k-1} = -1$) niza koji nema graničnu vrednost. U ovom odeljku upravo ćemo se baviti pitanjem odnosa između konvergencije datog niza i konvergencije njegovih podnizova. Najpre dajemo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 3.2.2

Za tačku $a \in \overline{\mathbf{R}}$ kažemo da je *tačka nagomilavanja* niza realnih brojeva (a_n) ako postoji podniz (a_{n_k}) tog niza koji teži ka a kad $k \to \infty$.

Tačku nagomilavanja nekog niza možemo i ovako okarakterisati:

STAV 3.2.2

Tačka $a \in \overline{\mathbf{R}}$ je tačka nagomilavanja niza (a_n) ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a i svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $r \in \mathbf{N}$, $r > n$, takvo da je $a_r \in U$.

Dokaz.

Neka je a tačka nagomilavanja niza (a_n) i neka je U proizvoljna njena okolina. Ako $a_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$, tada je za sve k počev od nekog ispunjeno $a_{n_k} \in U$. No, kako je (n_k) strogo rastući niz prirodnih brojeva, to će za svako unapred izabrano $n \in \mathbf{N}$ biti $n_k > n$ za pogodno k, čime je dokazano da postoji $r > n$ za koje je $a_r \in U$.

Obrnuto, neka za svako U i svako n postoji $r > n$ za koje je $a_r \in U$. Pretpostavimo da je a konačna tačka (za beskonačne tačke dokaz je sličan). Definisaćemo induktivno strogo rastući niz prirodnih brojeva n_k sa svojstvom da je $|a_{n_k} - a| < 1/k$ za sve $k \in \mathbf{N}$. Za n_1 uzimamo bilo koji prirodan broj za koji je $|a_{n_1} - a| < 1$, tj. za koji a_{n_1} pripada 1-okolini tačke a. Ako su brojevi $n_1 < \cdots < n_k$ već izabrani tako da je $|a_{n_i} - a| < 1/i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, izaberimo broj n_{k+1} tako da je ispunjeno

$$n_{k+1} > n_k \qquad \text{i} \qquad |a_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}.$$

Na taj način dobijamo podniz (a_{n_k}) niza (a_n) koji očigledno teži ka a. ■

Iz ovog stava vidimo i razliku između pojma limesa i pojma tačke nagomilavanja nekog niza. Naime, limes niza ima osobinu da se u svakoj njegovoj okolini nalaze *skoro svi* članovi niza (dakle, van nje samo njih konačno mnogo), dok se u proizvoljnoj okolini tačke nagomilavanja nalazi samo *beskonačno mnogo* članova niza (pa ih i van nje takođe može biti beskonačno mnogo). Naravno, limes niza (ako postoji) uvek je njegova tačka nagomilavanja (i to, kako ćemo videti, jedina), dok obrnuto ne mora da važi.

Napomenimo još važnu razliku između pojma tačke nagomilavanja *niza* (a_n) i tačke nagomilavanja *skupa njegovih vrednosti* $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, kako je opisana u definiciji 2.7.1. Na primer, u slučaju malopre pomenutog niza $a_n = (-1)^n$ jasno je da su -1 i 1 njegove tačke nagomilavanja, međutim $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{-1, 1\}$, pa taj skup nema tačaka nagomilavanja jer je konačan. Pomoću nizova, tačku nagomilavanja nekog skupa možemo okarakterisati na sledeći način.

STAV 3.2.3

Tačka $a \in \overline{\mathbf{R}}$ je tačka nagomilavanja skupa $A \subset \mathbf{R}$ ako i samo ako postoji niz međusobno različitih elemenata $a_n \in A$ koji teži ka a.

Dokaz.

Neka je $a \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka nagomilavanja skupa A. Ako je $a \in \mathbf{R}$, označimo sa U_n $\frac{1}{n}$-okolinu tačke a, a ako je $a = +\infty$ sa U_n označimo okolinu $(n, +\infty)$; slično postupimo u slučaju $a = -\infty$. Svaka od tih okolina (za proizvoljno $n \in \mathbf{N}$) sadrži beskonačno mnogo elemenata skupa A, pa se može formirati niz vrednosti $a_n \in A$ na sledeći način: $a_1 \in U_1 \cap A$ se bira proizvoljno; ako su već izabrani $a_i \in U_i \cap A$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, bira se $a_{k+1} \in U_{k+1} \cap A$ tako da bude različit od svih a_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Za tako dobijeni niz očigledno važi $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Obrnuto je takođe jednostavno. ■

Do sada smo raspravljali o tačkama nagomilavanja nizova ne znajući da li one postoje. Jednostavan odgovor na pitanje o egzistenciji tačaka nagomilavanja realnih nizova daje sledeća posledica leme 2.7.2, koju ćemo zvati *Bolcano-Vajerštrasovom teoremom za nizove*.

TEOREMA 3.2.1

1° *Svaki ograničen niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u* $\mathbf{R}$.

2° *Svaki niz realnih brojeva ima bar jednu tačku nagomilavanja u* $\overline{\mathbf{R}}$.

Dokaz.

1° Neka je niz (a_n) ograničen. Ako je $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ konačan, tada postoji element a tog skupa, takav da je $a_n = a$ za beskonačno mnogo vrednosti $n = n_1, n_2, \ldots$. Očigledno je da podniz (a_{n_k}) teži ka a. Ako je $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ beskonačan, on prema lemi 2.7.2 ima tačku nagomilavanja u $\mathbf{R}$; prema prethodnom stavu ona je očigledno tačka nagomilavanja niza (a_n).

2° Ostaje da se razmotri slučaj neograničenog niza (a_n). Neka je, na primer, (a_n) neograničen odozgo, tj. neka u svakoj okolini U tačke $+\infty$ mogu da se nađu članovi a_n datog niza. Postupajući analogno kao u dokazu stava 2 dobijamo podniz (a_{n_k}) koji teži ka $+\infty$ kad $k \to \infty$. Dakle, $+\infty$ je u tom slučaju tačka nagomilavanja datog niza. ■

Dakle, za dati niz (a_n) realnih brojeva skup $T(a_n)$ njegovih tačaka nagomilavanja u $\overline{\mathbf{R}}$ sigurno je neprazan. Gornje ograničenje za brojnost tog skupa ne postoji — lako se prave primeri (v. primer 1.4° i zadatak 7) nizova koji imaju beskonačno mnogo tačaka nagomilavanja, pa čak i ceo skup $\overline{\mathbf{R}}$ može biti skup tačaka nagomilavanja nekog niza. Zato je netrivijalno pitanje da li među svim tačkama nagomilavanja nekog niza postoje najveća i najmanja (podsetimo se: beskonačan podskup skupa $\overline{\mathbf{R}}$ mora imati supremum i infimum, ali ne mora imati maksimum i minimum). Ipak, odgovor na to pitanje je potvrdan. Za dokaz ćemo koristiti sledeću lemu.

LEMA 3.2.1

Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $T(a_n)$ skup njegovih tačaka nagomilavanja. Ako je a tačka nagomilavanja skupa $T(a_n)$, tada $a \in T(a_n)$.

Dokaz.

Neka je a tačka nagomilavanja skupa $T(a_n)$ i U proizvoljna okolina tačke a. To znači da postoji $b \in T(a_n) \cap U$. Kako je b tačka nagomilavanja niza a_n, a U očigledno takođe okolina tačke b, to prema stavu 2 za svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $r > n$, takvo da je $a_r \in U$. Time su ispunjeni uslovi da je i a tačka nagomilavanja niza (a_n), tj. $a \in T(a_n)$. ■

STAV 3.2.4

Skup $T(a_n)$ tačaka nagomilavanja realnog niza (a_n) ima maksimum i minimum u $\overline{\mathbf{R}}$.

Dokaz.

Prema teoremi 1 skup $T(a_n)$ je neprazan, pa ima supremum i infimum. Ako je taj skup konačan, tvrđenje je trivijalno. Ako je beskonačan i ako njegov supremum i infimum ne bi bili ujedno njegov maksimum i minimum, prema karakterizaciji supremuma i infimuma (v. odeljak 2.4), očigledno je da bi oni bili tačke nagomilavanja skupa $T(a_n)$. Na osnovu prethodne leme, te tačke bi pripadale skupu $T(a_n)$, suprotno pretpostavci. ■

DEFINICIJA 3.2.3

Najveća tačka nagomilavanja niza (a_n) zove se *gornji limes* ili *limes superior* niza (a_n) i označava sa $\limsup a_n$ ili $\overline{\lim} a_n$. Analogno se definiše *donji limes* ili *limes inferior* niza (a_n) koji se označava sa $\liminf a_n$ ili $\underline{\lim} a_n$.

Naravno, treba razlikovati uvedene pojmove od pojmova $\sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ i $\inf\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ (v. dalje primer 1.2°). Jednu praktičnu karakterizaciju novouvedenih pojmova $\overline{\lim}$ i $\underline{\lim}$ kada su oni konačni daje

STAV 3.2.5

Neka je (a_n) niz u $\mathbf{R}$ i $\overline{\lim} a_n = a \in \mathbf{R}$. Tada važi:

1° za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, takvo da $n > n_0$ povlači $a_n < a + \varepsilon$ (tj. za svako $\varepsilon > 0$ skoro svi članovi niza (a_n) su manji od $a + \varepsilon$);

2° za svako $\varepsilon > 0$ i svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $r > n$, takvo da je $a_r > a - \varepsilon$ (tj. za svako $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo članova niza (a_n) koji su veći od $a - \varepsilon$).

Obrnuto, ako $a \in \mathbf{R}$ zadovoljava uslove 1° i 2°, onda je $a = \overline{\lim} a_n$.

Dokaz.

Ako 1° ne bi bilo ispunjeno, to bi značilo da niz (a_n) ima beskonačno mnogo vrednosti u intervalu $[a + \varepsilon, +\infty)$. Od tih vrednosti mogao bi se konstruisati niz koji bi u tom intervalu imao tačku nagomilavanja — ona bi dakle bila tačka nagomilavanja niza (a_n) koja je veća od $a = \max T(a_n)$, što je nemoguće.

Da dokažemo 2°, dovoljno je primetiti da je skup $(a - \varepsilon, +\infty)$ okolina tačke a koja je tačka nagomilavanja niza (a_n) i primeniti stav 2.

Pretpostavimo da postoje dva različita realna broja a i a' (recimo $a < a'$) koja zadovoljavaju 1° i 2°. Neka je $x \in (a, a')$ proizvoljno. Kako a zadovoljava uslov 1°,

to je $a_n < x$ za $n > n_0$. No, tada u okolini $(x, +\infty)$ tačke a' ima samo konačno mnogo članova niza (a_n), pa a' ne zadovoljava uslov 2°. Kontradikcija. ■

Analogno se formuliše i dokazuje tvrđenje za $\underline{\lim} a_n \in \mathbf{R}$.

Još jednu karakterizaciju gornjeg i donjeg limesa dajemo u zadatku 24.

Konstatujmo najzad da iz navedenih tvrđenja neposredno slede sledeće jednostavne činjenice.

STAV 3.2.6

1° Niz (a_n) ima graničnu vrednost ako i samo ako je $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$, tj. ako i samo ako ima tačno jednu tačku nagomilavanja.

2° Niz (a_n) konvergira (tj. granična vrednost mu je konačna) ako i samo ako je $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$ konačan broj, odnosno ako i samo ima tačno jednu tačku nagomilavanja i ona je konačna. ■

STAV 3.2.7

Niz (a_n) ima graničnu vrednost ako i samo ako svaki njegov podniz ima graničnu vrednost. ■

PRIMERI 3.2.1

1° $a_n = (-1)^n$. $T(a_n) = \{-1, 1\}$, $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{-1, 1\}$. $\overline{\lim} a_n = \sup_{n \in \mathbf{N}} a_n = 1$, $\underline{\lim} a_n = \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n = -1$. $\lim_{n \to \infty} a_n$ ne postoji.

2° $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots\right\}$, $\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n = \dfrac{1}{2}$, $\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n = -1$. Niz (a_n) konvergira ka 0, pa je $T(a_n) = \{0\}$ i $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = 0$.

3° $a_n = n^{(-1)^n}$. $a_{2k} = 2k \to +\infty$ $(k \to \infty)$, $a_{2k-1} = \dfrac{1}{2k-1} \to 0$ $(k \to \infty)$. $T(a_n) = \{0, +\infty\}$, $\underline{\lim} a_n = 0$, $\overline{\lim} a_n = +\infty$.

4° Prema primeru 2.8.4, postoji niz (a_n), takav da je $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} = \mathbf{Q}$. Na osnovu primera 2.7.1.3° onda je $T(a_n) = \overline{\mathbf{R}}$, $\underline{\lim} a_n = -\infty$, $\overline{\lim} a_n = +\infty$. ▲

3.3. KOŠIJEV PRINCIP KONVERGENCIJE

U dosad izvedenim osobinama graničnih vrednosti (odeljak 3.1) uvek smo unapred znali da niz sa kojim radimo ima graničnu vrednost, a takođe i koja je to granica. Postavlja se pitanje može li se za neki niz odrediti da li on konvergira, koristeći se samo poznavanjem samog niza, a ne znajući unapred kojoj bi to graničnoj vrednosti on konvergirao. Jedan način da se to postigne opisaćemo u ovom odeljku.

DEFINICIJA 3.3.1

Za niz (a_n) realnih brojeva kažemo da je *Košijev* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji indeks $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da je $|a_m - a_n| < \varepsilon$ čim su indeksi m i n veći od n_0. Dakle,

$$(a_n) \text{ je Košijev} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})(m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

Opisno bismo mogli reći: niz (a_n) je Košijev ako su mu članovi sa dovoljno velikim indeksima proizvoljno blizu jedan drugom.

Sledeće osobine Košijevih nizova su jednostavne za dokaz.

STAV 3.3.1

1° Svaki konvergentni niz je Košijev.

2° Svaki Košijev niz je ograničen.

3° Ako Košijev niz ima konvergentan podniz, on je i sam konvergentan.

Dokaz.

1° Neka je $\lim_{n-\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Neka je $n_0 \in \mathbf{N}$ izabrano tako da je $|a_n - a| < \varepsilon/2$ za $n > n_0$. Tada je za sve m, $n > n_0$

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

pa je niz (a_n) Košijev.

2° Neka je (a_n) Košijev niz i za neko $\varepsilon > 0$ neka je n_0 izabrano tako da je $|a_m - a_n| < \varepsilon$ čim je m, $n > n_0$. Ako fiksiramo neko $m > n_0$, to znači da su svi članovi niza (a_n) za $n > n_0$ u ε-okolini tačke a_m. Povećavajući ε može se postići da ε-okolina tačke a_m obuhvati i sve ostale članove niza (ima ih konačno mnogo!).

3° Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ za m, $n > n_0$. Neka podniz (a_{n_k}) niza (a_n) ima konačan limes a. Izaberimo $k \in \mathbf{N}$ tako da je $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$; pri tom se može pretpostaviti da je $n_k > n_0$. Sada za $n > n_0$ važi

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Osnovno pitanje je da li važi obrat tvrđenja 1° iz ovog stava. Potvrdan odgovor naziva se *Košijevim principom konvergencije*. Njegov dokaz bitno se oslanja na aksiomu potpunosti (4) realne prave.

TEOREMA 3.3.1

Svaki Košijev niz u $\mathbf{R}$ *je konvergentan.*

Dokaz.

Neka je (a_n) Košijev niz u $\mathbf{R}$. Prema delu 2° prethodnog stava on je ograničen. Iz Bolcano-Vajerštrasove teoreme 2.1 za nizove sledi da postoji podniz (a_{n_k}) tog niza koji je konvergentan. Na osnovu dela 3° prethodnog stava dobijamo da je i niz (a_n) konvergentan. $\blacksquare$

PRIMERI 3.3.1

1° Posmatrajmo niz racionalnih brojeva u decimalnom zapisu

$$a_1 = 0{,}\alpha_1; \quad a_2 = 0{,}\alpha_1\alpha_2; \quad \ldots; \quad a_n = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n; \quad \ldots$$

gde su α_i cifre. Taj niz je Košijev. Zaista, za m, $n \in \mathbf{N}$ i, na primer, $m > n$ važi

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{\alpha_m}{10^m}\right| \leqslant 9\left(\frac{1}{10^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{10^m}\right)$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{10^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{10^{m-n}} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^m} < \frac{1}{10^n}$$

i dovoljno je izabrati n_0 tako da je $10^{n_0} > 1/\varepsilon$, pa će biti $|a_m - a_n| < \varepsilon$ za $m > n > n_0$. Dakle, niz (a_n) je konvergentan. Lako je videti da je njegova granica broj a čiji je decimalan zapis $0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$.

2° Neka je $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Da bismo dokazali da je niz (a_n) divergentan, dovoljno je dokazati da on nije Košijev. Zapišimo najpre logičku negaciju uslova iz definicije 1:

$$(a_n) \text{ nije Košijev} \iff (\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbf{N})(\exists m, n \in \mathbf{N})(m, n \geqslant n_0 \text{ i } |a_m - a_n| \geqslant \varepsilon).$$

U našem primeru uzmimo $\varepsilon = 1/2$, $m = 2n$. Tada je

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \varepsilon,$$

za svako $n \in \mathbf{N}$ i niz (a_n) nije Košijev. $\blacktriangle$

3.4. MONOTONI NIZOVI. BROJ e

Pojam strogo rastućeg niza (prirodnih) brojeva već smo koristili prilikom definisanja podniza niza realnih brojeva. Opšta definicija za realne nizove glasila bi ovako:

DEFINICIJA 3.4.1

Za niz (a_n) realnih brojeva kažemo da je *rastući* ako važi $a_n \leqslant a_{n+1}$ za svako $n \in \mathbf{N}$, a da je *strogo rastući* ako je $a_n < a_{n+1}$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Analogno se definišu *opadajući* i *strogo opadajući* nizovi. Jednim imenom nizove navedena četiri tipa zovemo *monotonim nizovima*.

Za monotone nizove važi veoma jednostavan kriterijum konvergencije koji daje sledeća

TEOREMA 3.4.1

1° Neka je (a_n) rastući niz realnih brojeva. Tada je (a_n) konvergentan (konačnoj granici) ako i samo ako je ograničen odozgo.

2° Svaki rastući niz u $\mathbf{R}$ *ima graničnu vrednost u* $\overline{\mathbf{R}}$.

Analogna tvrđenja važe za opadajuće nizove.

Dokaz.

1° Na osnovu stava 1.2 dovoljno je dokazati da rastući i odozgo ograničen niz ima (konačnu) graničnu vrednost. Prema teoremi o supremumu postoji $s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} < +\infty$. Na osnovu karakterizacije supremuma, za svako $\varepsilon > 0$ može se naći $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $s - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant s$. Zbog monotonije niza (a_n), takođe je $s - \varepsilon < a_n \leqslant s$ za $n > n_0$, tj. $|a_n - s| < \varepsilon$ za $n > n_0$. Dakle, $s = \lim_{n-\infty} a_n$.

2° Ako rastući niz (a_n) nije ograničen, to znači da se za svako $M \in \mathbf{R}$ može naći $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $a_{n_0} > M$. Analogno prethodnom, zbog monotonije je takođe $a_n > M$ za $n > n_0$, pa je $\lim_{n-\infty} a_n = +\infty$. $\blacksquare$

Bez obzira na svoju jednostavnost, ova teorema se često primenjuje u ispitivanju konvergencije realnih nizova. Evo nekoliko primera.

PRIMERI 3.4.1

1° Neka je $a_n = \frac{n}{q^n}$. Dokazaćemo da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ za $q > 1$.

Važi $a_{n+1}/a_n = (n+1)/nq \to 1/q$ $(n \to \infty)$, pa zbog $1/q < 1$, na osnovu stava 1.5 imamo da je $a_{n+1} < a_n$ počev od nekog n. Znači, niz (a_n) je opadajući i, očigledno, ograničen odozdo (na primer, nulom). Zato postoji konačan $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pa se u formuli $a_{n+1} = (n+1)a_n/(nq)$ može preći na granicu kad $n \to \infty$. Sledi $a = a/q$, odakle $a = 0$.

2° Dokazaćemo da je za svako $q \in \mathbb{R}$ i $a_n = \frac{q^n}{n!}$ ispunjeno $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Za $q = 0$ tvrđenje je trivijalno, a inače je dovoljno dokazati da ono važi za $q > 0$. Imamo $a_{n+1} = qa_n/(n+1)$, pa je za dovoljno veliko n, $a_{n+1} \leqslant a_n$. Dalje se postupa analogno prethodnom primeru.

3° Dokažimo da je niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen odozgo.

Na osnovu Bernulijeve nejednakosti imamo

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n},$$

tj.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}.$$

Za dokaz ograničenosti posmatrajmo drugi niz $b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$, $n > 1$. Očigledno je $a_n < b_n$, $n = 2, 3, \ldots$. Za niz (b_n) se, analogno prethodnom, dokazuje da je opadajući: iz

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}$$

sledi

$$b_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = b_{n+1}.$$

Na taj način je niz (a_n) odozgo ograničen (na primer, brojem $b_2 = 4$), te postoji $\lim_{n\to\infty} a_n$. Toj graničnoj vrednosti (prema Ojleru*) dajemo posebno ime.

DEFINICIJA 3.4.2

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

* L. Euler (1707–1783), švajcarski matematičar

Broj e je jedna od najvažnijih konstanti u matematičkoj analizi. Inače, e je iracionalan (v. zadatak 17) i čak transcendentan broj (v. npr. [29]). Prvih nekoliko decimala su mu

$$e = 2,718281828\ldots.$$

Uzgred primetimo da i niz (b_n) konstruisan u prethodnom dokazu takođe ima graničnu vrednost e. ▲

ZADACI

1. Dokazati: 1° $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = 0 \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $(k \in \mathbb{N})$;
   2° $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $(\forall n \in \mathbb{N})\, a_n \geqslant 0 \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$ $(k \in \mathbb{N})$.

2. Naći $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

3. Neka je $a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, i $a = \max\{a_1, \ldots, a_m\}$. Dokazati da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a$.

4. Niz (a_n) naziva se *beskonačno velikim* ako

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \implies |a_n| > M).$$

Dokazati:

1° $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ili $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \implies (a_n)$ je beskonačno veliki niz;

2° (a_n) je beskonačno veliki $\implies (a_n)$ je neograničen;

3° ni u 1° ni u 2° ne važe obrnute implikacije;

4° (a_n) je beskonačno veliki $\implies (1/a_n)$ je nula-niz.

5. Neka je (a_n) niz u $\mathbb{R}$. Dokazati:

1° $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \implies \lim_{n\to\infty} a_n = a$;

2° ako podnizovi (a_{2n}), (a_{2n+1}) i (a_{3n}) niza (a_n) konvergiraju, onda konvergira i sam niz (a_n).

6. Konstruisati primer niza (a_n), takvog da za svako $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ podniz (a_{kn}) konvergira, ali da (a_n) divergira.

7. 1° Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_p$ dati brojevi. Konstruisati niz čije su $a_1, a_2, \ldots, a_p$ tačke nagomilavanja.

2° Isto za date brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

3° Isto za tačke odsečka $[0, 1]$.

8. Za realne nizove (a_n) i (b_n) dokazati:

1° $\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim}\, a_n$; $\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim}\, a_n$.

2° $\overline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, a_n}$, $\underline{\lim}\, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim}\, a_n}$, ako je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $\underline{\lim}\, a_n > 0$.

3° $\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leqslant \underline{\lim}(a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \leqslant \overline{\lim}(a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$, ako su nizovi (a_n) i (b_n) ograničeni.

9. Neka su (a_n), (b_n) ograničeni nizovi pozitivnih brojeva. Dokazati:
$\underline{\lim} a_n \cdot \underline{\lim} b_n \leqslant \underline{\lim}(a_n b_n) \leqslant \underline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n \leqslant \overline{\lim}(a_n b_n) \leqslant \overline{\lim} a_n \cdot \overline{\lim} b_n$.

10. Neka je $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Dokazati:

1° $\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

2° Svaka od nejednakosti pod 1° može biti stroga.

11. Dokazati da je aksioma neprekidnosti (4) ekvivalentna konjunkciji Arhimedovog svojstva i svojstva da svaki Košijev niz konvergira. Dokazati da postoji uređeno polje u kome svaki Košijev niz konvergira, ali ne važi aksioma (4). (Za primer v. npr. [11].)

12. Dokazati da je monoton niz konvergentan ako mu je konvergentan jedan podniz.

13. Neka je $a > 0$, $x_1 > 0$ i $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbf{N}$. Dokazati da niz (x_n) konvergira i naći mu limes.

14. Neka je $c > 0$, $x_1 = \sqrt{c}$ i $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$, $n \in \mathbf{N}$. Dokazati da niz (x_n) konvergira i naći mu graničnu vrednost.

15. Neka je $a, b > 0$, $a \neq b$. Nizovi (a_n), (b_n) definisani su sa $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dokazati da nizovi (a_n) i (b_n) konvergiraju istoj graničnoj vrednosti.

16. Dokazati $\lim_{n\to\infty} n^\alpha q^n = 0$ za $\alpha \in \mathbf{R}$, $|q| < 1$.

17. Dokazati: 1° $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right) = e$;

2° $(\forall n \in \mathbf{N})(\exists \theta_n,\ 0 < \theta_n < 1)\ e = 2 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{\theta_n}{n! \cdot n}$;

3° e je iracionalan broj.

18. Dokazati *Štolcovu* teoremu*: Neka je (y_n) strogo rastući niz (počev od nekog n) i $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$; neka je (x_n) proizvoljan niz u $\mathbf{R}$ i neka postoji $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$. Tada je i $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$. [Uputstvo: Koristiti identitet

$$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_N - l y_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - l\right).]$$

19. Naći $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbf{N}$.

20. Dokazati *Košijevu teoremu*: Ako postoji $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, tada i niz $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ ima graničnu vrednost a. Pokazati da niz (b_n) može imati limes i ako ga niz (a_n) nema.

21. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

22. Neka je $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Primenom zadatka 10 ili 21 dokazati:

1° ako postoji $l = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, tada je i $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$;

* O. Stolz (1842–1905), austrijski matematičar

2° za niz $a_n = \dfrac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$ je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2}$, ali niz $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ divergira.

23. Dokazati da je $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

24. Označimo sa $\sup_{n\geqslant k} x_n$, odnosno $\inf_{n\geqslant k} x_n$, supremum, odnosno infimum skupa $\{x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ za dati niz realnih brojeva (x_n). Dokazati da važi

$$\overline{\lim} x_n = \inf_{k\geqslant 1} \sup_{n\geqslant k} x_n, \quad \underline{\lim} x_n = \sup_{k\geqslant 1} \inf_{n\geqslant k} x_n.$$

Dokazati takođe da je

$$\overline{\lim} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} x_n, \quad \underline{\lim} x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k} x_n,$$

pri čemu u slučaju niza neograničenog odozgo (odozdo), kada je za svako $k \in \mathbf{N}$ ispunjeno $\sup_{n\geqslant k} x_n = +\infty$ ($\inf_{n\geqslant k} x_n = -\infty$), podrazumevamo da je $\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k} x_n = +\infty$ ($\lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k} x_n = -\infty$).

4. REALNE FUNKCIJE REALNE PROMENLJIVE

4.1. POJAM I OSOBINE

Pod *realnom funkcijom realne promenljive* podrazumevaćemo svaku funkciju $f: A \to \mathbf{R}$, definisanu na nekom podskupu A skupa $\mathbf{R}$ realnih brojeva i sa vrednostima u $\mathbf{R}$. Takve funkcije mogu biti zadate na razne načine, no jedan od najinteresantnijih jeste slučaj kada se one zadaju putem nekog analitičkog izraza $f(x)$, na primer:

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}, \quad f_2(x) = \ln \sin^2 x, \quad f_3(x) = \arcsin e^x.$$

Dogovorimo se odmah o sledećem: ako nije drugačije rečeno, pod domenom realne funkcije f realne promenljive date analitičkim izrazom $f(x)$ podrazumeva se maksimalan (u smislu inkluzije) podskup skupa $\mathbf{R}$ koji taj izraz dopušta, tj.

$$\{\, x \in \mathbf{R} \mid f(x) \text{ je definisano } \}.$$

Tako, na primer, za prvi od navedenih izraza domen je $(-\infty,-1] \cup (1,+\infty)$, za drugi $\{\, x \in \mathbf{R} \mid x \neq n\pi,\ n \in \mathbf{Z} \}$, a za treći $(-\infty, 0]$.

Za kodomen takvih funkcija uvek ćemo uzimati skup $\mathbf{R}$, osim kada posebno istaknemo drugačije.

Osim ovog *eksplicitnog* zadavanja funkcija ponekad ćemo koristiti i *parametarsko* zadavanje. Neka su $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ realne funkcije definisane na istom podskupu A skupa $\mathbf{R}$ i neka je pri tom $\varphi: A \to B$ bijekcija, tj. neka postoji funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$; tada je definisana funkcija $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ — za nju ćemo reći da je parametarski zadata sistemom $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in A$. Neke primere ovako zadatih funkcija navodimo u zadacima 24 i 25.

Navedimo sada nekoliko jednostavnih osobina realnih funkcija realne promenljive.

DEFINICIJA 4.1.1

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je *simetričan* ako za svako $x \in A$ broj $-x$ takođe pripada A. Funkcija $f: A \to \mathbf{R}$ definisana na simetričnom skupu A je *parna* ako za svako $x \in A$ važi $f(-x) = f(x)$, a *neparna* ako je za svako $x \in A$ ispunjeno $f(-x) = -f(x)$.

Očigledno, grafik parne funkcije ima osobinu da je simetričan u odnosu na y-osu, a grafik neparne funkcije da je simetričan u odnosu na koordinatni početak. Ta osobina olakšava skiciranje grafika takvih funkcija (v. odeljak 6.8).

PRIMERI 4.1.1

1° Polinom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$ je parna, a polinom $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{2k+1}$ je neparna funkcija.

2° Najveći broj funkcija nisu ni parne ni neparne, ali se svaka realna funkcija definisana na simetričnom podskupu realne prave može napisati u obliku zbira jedne parne i jedne neparne funkcije (v. zadatak 2). ▲

DEFINICIJA 4.1.2

Za funkciju realne promenljive $f: A \to \mathbf{R}$ kažemo da je *periodična* ako postoji pozitivan broj T (koji se naziva *periodom* funkcije f), takav da važi

$$(1) \qquad (\forall x \in A)(x + T \in A \text{ i } f(x+T) = f(x)).$$

Najmanji pozitivan broj T (ako postoji) za koji važi navedena osobina naziva se *osnovnim periodom* funkcije f.

PRIMERI 4.1.2

1° Funkcija $f(x) = x - [x]$ je periodična s osnovnim periodom 1.

2° *Dirihleova* funkcija* $\chi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (u stvari, karakteristična funkcija skupa racionalnih brojeva — v. zadatak 1.20), data sa

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{ako } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

periodična je, jer za svaki pozitivan racionalan broj T važi (1). Međutim, očigledno ne postoji njen najmanji pozitivan period, jer je infimum takvih brojeva T jednak nuli. ▲

DEFINICIJA 4.1.3

Neka je $B \subset A \subset \mathbf{R}$. Funkcija $f: A \to \mathbf{R}$ je:

(a) *rastuća* na B ako $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$;

(b) *strogo rastuća* na B ako $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;

(c) *opadajuća* na B ako $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$;

(d) *strogo opadajuća* na B ako $(\forall x_1, x_2 \in B)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$;

Za funkciju f koja zadovoljava bilo koji od uslova (a)–(d) kažemo da je *monotona*, a za funkciju koja zadovoljava uslov (b) ili uslov (d) da je *strogo monotona*.

PRIMER 4.1.3

Funkcija $f(x) = x^2$ je strogo rastuća na $[0,+\infty)$, a strogo opadajuća na $(-\infty, 0]$. Ona nije monotona na $\mathbf{R}$. ▲

* P. G. L. Dirichlet (1805–1859), nemački matematičar

DEFINICIJA 4.1.4

Za funkciju $f: A \to \mathrm{R}$ kažemo da je *ograničena odozgo* (odnosno *ograničena odozdo, ograničena*) na A ako je takav skup njenih vrednosti $\{ f(x) \mid x \in A \}$, tj. ako postoji $M \in \mathrm{R}$, takvo da je za sve $x \in A$ ispunjeno $f(x) < M$ (odn. $f(x) > M$, $|f(x)| < M$).

PRIMERI 4.1.4

1° Funkcija $f(x) = x - [x]$ ograničena je na R jer je $\{ f(x) \mid x \in \mathrm{R} \} = [0, 1)$.

2° Funkcija $f(x) = x^2$ ograničena je odozdo, ali ne i odozgo na R. Ona je, međutim, ograničena na svakom odsečku $[-A, A]$, $A \in \mathrm{R}$. ▲

4.2. GRANIČNA VREDNOST. OSOBINE

DEFINICIJA 4.2.1

Neka je $f: A \to \mathrm{R}$ funkcija realne promenljive i $a \in \overline{\mathrm{R}}$ tačka nagomilavanja skupa A. Kažemo da je $b \in \overline{\mathrm{R}}$ *granična vrednost (limes) funkcije f u tački a* i pišemo $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ako za svaku okolinu $V(b)$ tačke b postoji okolina $U(a)$ tačke a, takva da

$$(\forall x \in A)(x \in U(a), x \neq a \implies f(x) \in V(b)).$$

Primetimo odmah da prema uslovima prethodne definicije funkcija f može, ali ne mora biti definisana u tački a, no da sama vrednost $f(a)$ (ako postoji) ne utiče na graničnu vrednost $\lim_{x \to a} f(x)$. Da bismo to istakli, dogovorimo se da ako je $U(a)$ neka okolina tačke a, sa $\dot{U}(a)$ označavamo skup

$$\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}.$$

Koristeći takvu oznaku možemo zapisati:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff (\forall V(b))(\exists U(a))\, f(\dot{U}(a)) \subset V(b).$$

Da bismo dobili operativniju definiciju granične vrednosti, treba da odvojeno posmatramo slučajeve konačnih, odnosno beskonačnih a i b. Tako, na primer, ako su a i b konačni, imamo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

Čitaocu prepuštamo da na sličan način zapiše odgovarajuće uslove kada su jedan ili oba broja a i b jednaka $+\infty$ ili $-\infty$.

PRIMERI 4.2.1

1° Neka je funkcija* $\operatorname{sgn}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definisana pomoću

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x > 0, \\ 0, & \text{ako je } x = 0, \\ -1, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Tada je $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1 \neq \operatorname{sgn} 0$, dok $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ ne postoji. (V. i primer 2.)

2° $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

3° $\lim_{x \to +\infty} (x - [x])$ ne postoji (videti i primer 4).

4° Za Dirihleovu funkciju χ, $\lim_{x \to a} \chi(x)$ ne postoji ni za jedno $a \in \overline{\mathrm{R}}$. To sledi iz činjenice da se u svakoj okolini $U(a)$ tačke a nalaze kako racionalni, tako i iracionalni brojevi. ▲

U navedenim primerima držali smo se konvencije date na početku odeljka 4.1 da se, kadgod nije drugačije rečeno, za domen realne funkcije realne promenljive date analitičkim izrazom uzima najveći skup koji taj izraz dopušta. Međutim, često ćemo imati posla sa primerima kod kojih se uzima neki manji skup A za oblast definisanosti (ili funkcija nije ni definisana analitičkim izrazom, već na neki drugi način). U takvim situacijama, da bismo istakli koji skup uzimamo za domen, umesto $\lim_{x \to a} f(x)$ pisaćemo $\lim_{A \ni x \to a} f(x)$. Naravno, u definiciji (1) uvek treba podrazumevati da $f(\dot{U}(a)) \subset V(b)$ u stvari znači $f(\dot{U}(a) \cap A) \subset V(b)$. Jasno je pri tom da ako je $A \subset B$ i $\lim_{B \ni x \to a} f(x) = b$, onda je i $\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b$, no obrnuto ne mora da važi.

PRIMERI 4.2.2

1° Neka je $\mathrm{R}^+ = \{ x \in \mathrm{R} \mid x > 0 \}$ i $\mathrm{R}^- = \{ x \in \mathrm{R} \mid x < 0 \}$. Tada je $\lim_{\mathrm{R}^+ \ni x \to 0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{\mathrm{R}^- \ni x \to 0} \operatorname{sgn} x = -1$, mada, kao što smo videli, ne postoji $\lim_{\mathrm{R} \ni x \to 0} \operatorname{sgn} x$.

2° $\lim_{\mathrm{N} \ni x \to \infty} (x - [x]) = 0$. ▲

Situacija kao u slučaju 1° prethodnog primera sreće se često u praksi, pa ćemo se dogovoriti da tada koristimo posebnu oznaku.

DEFINICIJA 4.2.2

Neka je $a \in \mathrm{R}$ tačka nagomilavanja skupa $\mathrm{R}_a^+ \cap A = \{ x \in A \mid x > a \}$ i $f: A \to \mathrm{R}$. Vrednost $\lim_{\mathrm{R}_a^+ \cap A \ni x \to a} f(x)$ (ako postoji) označavaćemo sa $\lim_{x \to a+0} f(x)$ ili $f(a+0)$ (ako se podrazumeva da je A domen funkcije f) i zvaćemo *desnom graničnom vrednošću* funkcije f u tački a. Specijalno, ako je $a = 0$ pišemo $\lim_{x \to +0} f(x)$ ili $f(+0)$.

Analogno se definiše *leva granična vrednost* $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ (odnosno $\lim_{x \to -0} f(x) = f(-0)$ ako je $a = 0$).

Dakle, $\lim_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \to -0} \operatorname{sgn} x = -1$.

Jasno je da važi

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = b$$

* signum (lat.) – znak

(pri tom se podrazumeva da je domen funkcije f takav da ima smisla govoriti i o levom i o desnom limesu u tački a).

PRIMER 4.2.3

$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$, $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ne postoji. ▲

Slučaj 2° primera 2 je specijalan slučaj sledeće situacije: neka je $f\colon A\to\mathbf{R}$ i neka je pri tom $+\infty$ tačka nagomilavanja skupa $A\cap\mathbf{N}$. U tom slučaju zajedno sa funkcijom $f\colon A\to\mathbf{R}$ možemo posmatrati funkciju $f|A\cap\mathbf{N}$, tj. niz $f(n)=x_n$ je definisan za dovoljno velike vrednosti n. Vidimo da je pojam granične vrednosti niza realnih brojeva uveden definicijom 3.1.1 u stvari specijalan slučaj pojma limesa opisanog u definiciji 1, jer je $\lim_{n\to\infty}x_n$ jednostavno druga oznaka za $\lim_{\mathbf{N}\ni x\to+\infty}f(x)$. Naravno, iz već rečenog je jasno da ako postoji $\lim_{x\to+\infty}f(x)$, onda postoji i $\lim_{n\to\infty}x_n$, no obrnuto ne mora da važi (v. primere 1.3° i 2.2°).

U opštem slučaju veza između granične vrednosti funkcije $\lim_{x\to a}f(x)$ i graničnih vrednosti nizova $(f(x_n))$ za razne nizove (x_n) za koje je $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ može se precizno izraziti sledećom teoremom.

TEOREMA 4.2.1

Granična vrednost funkcije realne promenljive $f\colon A\to\mathbf{R}$ u tački $a\in\overline{\mathbf{R}}$ jednaka je $b\in\overline{\mathbf{R}}$ ako i samo ako za svaki niz (x_n), takav da je $x_n\in A\setminus\{a\}$ $(n\in\mathbf{N})$ i $\lim_{n\to\infty}x_n=a$, važi $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$.

Dokaz.

Neka je najpre $\lim_{x\to a}f(x)=b$ i neka je (x_n) proizvoljan niz za koji je $x_n\in A\setminus\{a\}$ $(n\in\mathbf{N})$ i $\lim_{n\to\infty}x_n=a$. Neka je $V(b)$ proizvoljna okolina tačke b. Tada po pretpostavci postoji okolina $U(a)$ tačke a, takva da je $f(\mathring{U}(a))\subset V(b)$. Izaberimo broj $n_0\in\mathbf{N}$, takav da je $x_n\in U(a)$ za $n>n_0$. Po pretpostavci je tada i $x_n\in\mathring{U}(a)$ (jer je $x_n\neq a$), pa dobijamo $f(x_n)\in V(b)$ za $n>n_0$, što znači da je $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$.

Obrnuto, pretpostavimo da nije $\lim_{x\to a}f(x)=b$. To znači da se može naći okolina $V(b)$ tačke b, takva da za svaku okolinu $U(a)$ tačke a važi $f(\mathring{U}(a))\not\subset V(b)$. Izaberimo niz $\frac{1}{n}$-okolina tačke a — $U_{1/n}(a)$, $n=1,2,\ldots$. Kako je $f(\mathring{U}_{1/n}(a))\not\subset V(b)$, to se za svako n može izabrati $x_n\in\mathring{U}_{1/n}(a)$ tako da $f(x_n)\notin V(b)$. Konstruisani niz (x_n) ispunjava očigledno uslove $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ i $x_n\neq a$ $(n\in\mathbf{N})$, ali $\lim_{n\to\infty}f(x_n)\neq b$. Dakle, ako nije $\lim_{x\to a}f(x)=b$, onda nije ispunjen uslov dat u teoremi. Time je teorema dokazana. ■

Definicija 1 granične vrednosti pripisuje se Košiju i još naziva definicijom „na jeziku okolina" (ili „na jeziku ε–δ", ako se uzme u obzir njen zapis za konačne a i b), dok je uslov dat ovom teoremom kao definiciju limesa („na jeziku nizova") koristio Hajne*. Tako se ovom teoremom iskazuje ekvivalentnost Košijeve i Hajneove definicije granične vrednosti.

* H. E. Heine (1821–1881), nemački matematičar

PRIMER 4.2.4

U primeru 1.3° već smo konstatovali da $\lim_{x\to\infty}(x-[x])$ ne postoji. To sad možemo lako dokazati koristeći teoremu 1. Naime, za $x_n'=n$ imamo $x_n'\to+\infty$ $(n\to\infty)$ i $f(x_n')=0\to 0$ $(n\to\infty)$, a za $x_n''=n+\frac{1}{2}$ imamo takođe $x_n''\to+\infty$ $(n\to\infty)$, ali $f(x_n'')=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}\neq 0$ $(n\to\infty)$. Na taj način, ne može postojati vrednost kojoj bi težio niz $(f(x_n))$ *za svaki* niz (x_n) koji teži ka $+\infty$. ▲

Izvedena veza između pojma granične vrednosti funkcije i granične vrednosti niza omogućava nam da praktično za sve osobine graničnih vrednosti nizova izvedene u odeljku 3.1 dokažemo analogone kad su u pitanju limesi funkcija. Prepustićemo čitaocu da na taj način dokaže stavove koje ćemo sada navesti, a mi ćemo radi uvežbavanja operisanja sa pojmovima definicije 1 dokazati neke od njih „na jeziku okolina".

STAV 4.2.1

Ako funkcija f ima limes u tački a, on je jednoznačno određen. ■

STAV 4.2.2

Ako funkcija f ima konačnu graničnu vrednost u tački a, onda postoji okolina $U(a)$ tačke a, takva da je funkcija f ograničena na skupu $\mathring{U}(a)$.

Dokaz.

Važi $\{f(x)\mid x\in\mathring{U}(a)\}=f(\mathring{U}(a))\subset V(b)$ za proizvoljnu okolinu $V(b)$ tačke b i pogodno odabranu okolinu $U(a)$ tačke a. Kako $V(b)$ možemo izabrati tako da bude ograničen skup, takav je i $\{f(x)\mid x\in\mathring{U}(a)\}$. ■

DEFINICIJA 4.2.3

Ako je $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$, kažemo da je funkcija realne promenljive $\alpha\colon A\to\mathbf{R}$ *beskonačno mala* kad $x\to a$.

STAV 4.2.3

1° *Važi $\lim_{x\to a}f(x)=b\in\mathbf{R}$ ako i samo ako je $f(x)=b+\alpha(x)$, gde je α beskonačno mala kad $x\to a$.*

2° *Zbir i razlika dve beskonačno male funkcije kad $x\to a$ su beskonačno male kad $x\to a$ (podrazumeva se da su zbir i razlika definisani na preseku oblasti definisanosti sabiraka).*

3° *Ako je α beskonačno mala kad $x\to a$, a funkcija β je ograničena na skupu $\mathring{U}(a)$ za neku okolinu $U(a)$ tačke a, tada je $\alpha\beta$ beskonačno mala kad $x\to a$.*

Dokaz.

3° Neka je $|\beta(x)|<M$ za sve $x\in\mathring{U}(a)$ i neka je $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$. Za dato $\varepsilon>0$ neka je $V(a)$ okolina tačke a za koju je $|\alpha(x)|<\varepsilon/M$ čim je $x\in\mathring{V}(a)$. Kako je presek $W(a)=U(a)\cap V(a)$ očigledno takođe okolina tačke a, a pri tom je $|\alpha(x)\beta(x)|<(\varepsilon/M)\cdot M=\varepsilon$ za $x\in\mathring{W}(a)$, to je i $\lim_{x\to a}\alpha(x)\beta(x)=0$. ■

STAV 4.2.4

Neka je $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ *i* $b, c \in \mathbf{R}$. *Tada je:*

1° $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$;

2° $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc$;

3° $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ *ako je* $c \neq 0$.

Dokaz.

3° Kao posledica narednog stava može se dokazati da iz pretpostavke $c \neq 0$ sledi da postoji okolina $U(a)$ tačke a, takva da je za neko $r > 0$ ispunjeno $|g(x)| > r$ za sve $x \in \mathring{U}(a)$ (pa time i $g(x) \neq 0$ za $x \in \mathring{U}(a)$); zato odgovarajuća pretpostavka nije ni uključena u uslove ovog stava — videti napomenu posle dokaza stava 3.1.4). Na osnovu prethodnog stava imamo

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c \cdot g(x)},$$

gde su α i β beskonačno male kad $x \to a$. Iz prethodnog je $|1/(cg(x))| < 1/(|c|r)$ za $x \in \mathring{U}(a)$, pa je funkcija $1/(cg(x))$ ograničena na $\mathring{U}(a)$. Ponovnom primenom stava 3 zaključujemo da je $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = b/c$. ■

STAV 4.2.5

Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$ *i* $b < c$, *tada postoji okolina* $U(a)$ *tačke* a, *takva da je* $f(x) < g(x)$ *za* $x \in \mathring{U}(a)$. *Specijalno, ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = b < c$, *tada je* $f(x) < c$ *za* $x \in \mathring{U}(a)$, *gde je* $U(a)$ *neka okolina tačke* a.

Analogno važi kada se znak $<$ *zameni znakom* $>$.

Dokaz.

Neka su, na primer, $b, c \in \mathbf{R}$ (slično se postupa i ako je neki od njih beskonačan). Neka je $\varepsilon = (c-b)/2$, $V(b)$ ε-okolina tačke b i $W(c)$ ε-okolina tačke c. Izaberimo okolinu $U_1(a)$ za koju je $f(\mathring{U}_1(a)) \subset V(b)$ i okolinu $U_2(a)$ za koju je $g(\mathring{U}_2(a)) \subset W(c)$. Kako je okolina $V(b)$ na realnoj pravoj „levo" od okoline $W(c)$, to je za okolinu $U(a) = U_1(a) \cap U_2(a)$ tačke a ispunjeno $f(x) < g(x)$ za $x \in \mathring{U}(a)$. ■

STAV 4.2.6

Ako je za neku okolinu $U(a)$ *tačke* a *ispunjeno* $f(x) \leqslant g(x)$ *za sve* $x \in \mathring{U}(a)$ *i funkcije* f *i* g *imaju granične vrednosti kad* $x \to a$, *tada je i* $\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x)$. *Analogno važi kada se znak* $\leqslant$ *zameni znakom* $\geqslant$. ■

STAV 4.2.7

Neka su $f, g, h: A \to \mathbf{R}$ *tri funkcije realne promenljive,* a *tačka nagomilavanja skupa* A *i neka je* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *na nekoj okolini* $\mathring{U}(a)$ *tačke* a. *Ako je* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \in \overline{\mathbf{R}}$, *tada je i* $\lim_{x\to a} g(x) = b$. ■

4.3. EKSPONENCIJALNA, LOGARITAMSKA I STEPENA FUNKCIJA

Neka je $a > 1$ realan broj. U odeljku 2.4 definisali smo pojam stepena sa racionalnim izložiocem a^r, $r \in \mathbf{Q}$. Neke osobine te operacije navели smo u zadatku 2.13:

$$a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}, \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2},$$

gde su $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$. Tim osobinama dodajmo još i sledeće:

(1) $r_1 < r_2 \implies a^{r_1} < a^{r_2}$;

(2) ako je $r_0 \in \mathbf{Q}$, tada je $\lim_{\mathbf{Q}\ni r\to r_0} a^r = a^{r_0}$.

Dokažimo osobinu (2). Proverićemo najpre da ona važi u specijalnom slučaju $r_0 = 0$, tj. pokazaćemo da je $\lim_{\mathbf{Q}\ni r\to 0} a^r = 1$. Na osnovu (1) imamo da je

$$a^{-1/n} < a^r < a^{1/n} \quad \text{za} \quad |r| < \frac{1}{n}. \tag{3}$$

U primeru 3.1.2 dokazali smo da je $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$, a samim tim i $\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1$. To znači da se za dato $\varepsilon > 0$ može naći $n \in \mathbf{N}$ tako da je $1 - \varepsilon < a^{-1/n}$ i $a^{1/n} < 1 + \varepsilon$. Ako označimo $\delta = 1/n$, prema (3) imamo da je

$$1 - \varepsilon < a^r < 1 + \varepsilon \quad \text{za} \quad |r| < \delta.$$

Neka je sada $r_0 \in \mathbf{Q}$ proizvoljno. Za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo δ tako da

$$|s| < \delta \implies |a^s - 1| < \frac{\varepsilon}{a^{r_0}}.$$

Tada za $|r - r_0| < \delta$ važi

$$a^{r_0}\left(1 - \frac{\varepsilon}{a^{r_0}}\right) < a^r = a^{r_0}a^{r-r_0} < a^{r_0}\left(1 + \frac{\varepsilon}{a^{r_0}}\right),$$

odnosno

$$a^{r_0} - \varepsilon < a^r < a^{r_0} + \varepsilon,$$

čime je dokazano (2).

Naš sledeći zadatak je da definišemo šta ćemo podrazumevati pod a^x ako je $x \in \mathbf{R}$ proizvoljan *realan* broj.

Neka je, dakle, $x \in \mathbf{R}$ i $a > 1$. Posmatrajmo skupove $A = \{a^r \mid \mathbf{Q} \ni r < x\}$ i $B = \{a^r \mid \mathbf{Q} \ni r > x\}$. Na osnovu svojstva (1) lako zaključujemo da je skup A ograničen odozgo (proizvoljnim elementom skupa B), a skup B ograničen odozdo. Zato postoje konačni $s = \sup A$ i $i = \inf B$ i očigledno je $s \leqslant i$. Dokažimo da je u stvari $s = i$.

Zaista, za $r_1 < x < r_2$ je $a^{r_1} \leqslant s \leqslant i \leqslant a^{r_2}$, odakle sledi

$$0 \leqslant i - s \leqslant a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2-r_1} - 1) \leqslant s(a^{r_2-r_1} - 1).$$

Na osnovu svojstva (2), za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može se naći $\delta > 0$ tako da

$$0 < r_2 - r_1 < \delta \implies a^{r_2-r_1} - 1 < \frac{\varepsilon}{s}.$$

Na taj način, za takve $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$ važi $0 \leqslant i - s < \varepsilon$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljno, odatle sledi $s = i$.

DEFINICIJA 4.3.1 (EKSPONENCIJALNA F-C)
Za $x \in \mathrm{R}$ i $a > 1$ definiše se

$$a^x = s = i.$$

Funkcija $x \mapsto a^x$ zove se *eksponencijalna funkcija* sa osnovom a.

Lako je proveriti da je ovako uvedena funkcija proširenje funkcije $\mathrm{Q} \ni r \mapsto a^r$. Proverićemo sada da ona zadržava osnovna svojstva te funkcije, a i dobija neka nova.

STAV 4.3.1
Neka je $a > 1$. *Tada:*
1° $x \in \mathrm{R} \implies \lim_{\mathrm{Q} \ni r \to x} a^r = a^x$;
2° $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ *i* $x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2}$;
3° $x_1, x_2 \in \mathrm{R} \implies a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$;
4° $\lim_{\mathrm{R} \ni x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ *za* $x_0 \in \mathrm{R}$;
5° $x \mapsto a^x$ *je funkcija iz* R *na* $(0, +\infty)$.

Dokaz.
1° Na osnovu definicije, za dato $\varepsilon > 0$ mogu se naći r_1, $r_2 \in \mathrm{Q}$, takvi da je $r_1 < x < r_2$ i

$$s - \varepsilon < a^{r_1} \leqslant s = a^x = i \leqslant a^{r_2} < i + \varepsilon.$$

Kako $r_1 < r < r_2$ povlači $a^{r_1} < a^r < a^{r_2}$ za svako $r \in \mathrm{Q}$, to je

$$a^x - \varepsilon < a^r < a^x + \varepsilon \quad \text{za sve} \quad r \in (r_1, r_2).$$

2° Izaberimo racionalne brojeve r_1 i r_2, takve da je $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Iz definicije i osobina funkcije a^r sa racionalnim r sledi

$$a^{x_1} \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^{x_2}.$$

3° Dokazaćemo samo prvu od navedene dve relacije — druga se dokazuje slično. Neka su (r_n') i (r_n'') proizvoljna dva niza racionalnih brojeva koji konvergiraju ka x_1 i x_2, respektivno. Na osnovu 1° je $\lim_{n\to\infty} a^{r_n'} = a^{x_1}$ i $\lim_{n\to\infty} a^{r_n''} = a^{x_2}$, odakle

$$\begin{aligned} a^{x_1} a^{x_2} &= \lim_{n\to\infty} a^{r_n'} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{r_n''} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n'} a^{r_n''} \\ &= \lim_{n\to\infty} a^{r_n' + r_n''} = a^{x_1+x_2}, \end{aligned}$$

jer očigledno $\mathrm{Q} \ni r_n' + r_n'' \to x_1 + x_2$ $(n \to \infty)$.

4° se dokazuje slično kao i odgovarajuće svojstvo (2) koje smo dokazali na početku ovog odeljka; pri tom koristimo već dokazano svojstvo 2°.

5° Po definiciji je očigledno $a^x > 0$ za svako $x \in \mathrm{R}$. Neka je y proizvoljan pozitivan realan broj. Dokažimo da postoji $x \in \mathrm{R}$, takav da je $a^x = y$.

Poznato je (dokazuje se analogno Arhimedovom svojstvu skupa R) da postoji prirodan broj n, takav da je $a^{-n} < y < a^n$. Dakle, skupovi $A = \{ x \in \mathrm{R} \mid a^x < y \}$ i $B = \{ x \in \mathrm{R} \mid a^x > y \}$ su neprazni. Na osnovu 2° lako sledi da je $x_1 < x_2$ za sve $x_1 \in A$, $x_2 \in B$. Dakle, skupovi A i B zadovoljavaju uslove aksiome neprekidnosti realnih brojeva, tako da postoji broj $x \in \mathrm{R}$, takav da je $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ za sve $x_1 \in A$, $x_2 \in B$. Dokazaćemo da je $a^x = y$.

Pretpostavimo da je $a^x < y$. Na osnovu 4° je $\lim_{n\to\infty} a^{x+\frac{1}{n}} = a^x$, pa je za dovoljno veliko n, $a^{x+\frac{1}{n}} < y$, tj. $x + \frac{1}{n} \in A$. To je, međutim, kontradikcija sa izborom broja x. Na sličan način se isključuje mogućnost da je $a^x > y$. Dakle, $a^x = y$. ■

Ako je $0 < a < 1$, opisana procedura se može ponoviti, uz očigledne izmene. Na taj način se dolazi do funkcije $x \mapsto a^x$ koja ima ista svojstva kao i za $a > 1$, osim što se osobina 2° prethodnog stava zamenjuje sa

$2'$ $x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ i $x_1 < x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2}$.

Funkcija $f : \mathrm{R} \to (0, +\infty)$, data sa $f(x) = a^x$ za $a \in \mathrm{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, prema prethodnom stavu (osobine 2° i 5°), jeste bijekcija. Zato je određena njena inverzna funkcija f^{-1}.

DEFINICIJA 4.3.2 (LOGARITAMSKA F-C)
Inverzna funkcija $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathrm{R}$ funkcije $f : \mathrm{R} \to (0, +\infty)$ date sa $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ naziva se *logaritamskom funkcijom* sa osnovom a. Pišemo

$$x = \log_a y \iff y = a^x.$$

Na taj način, po definiciji je $\log_a a^x = x$ za sve $x \in \mathrm{R}$ i $a^{\log_a y} = y$ za sve $y > 0$. Neposredno iz definicije i prethodnog stava slede osnovne osobine logaritamske funkcije.

STAV 4.3.2
Neka je $a > 0$, $a \neq 1$, $y_0, y_1, y_2 > 0$. *Tada:*
1° $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$;
2° $\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$;
3° *za* $a > 1$ *važi:* $y_1 < y_2 \iff \log_a y_1 < \log_a y_2$;
za $0 < a < 1$ *važi:* $y_1 < y_2 \iff \log_a y_1 > \log_a y_2$;
4° *funkcija* $x \mapsto \log_a x$ *je preslikavanje iz* $(0, +\infty)$ *na* R;
5° $\lim_{y\to y_0} \log_a y = \log_a y_0$.

Dokaz.
5° Na osnovu 2° je $\log_a y - \log_a y_0 = \log_a(y/y_0)$. Zbog toga su nejednakosti $-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon$ ekvivalentne sa $\log_a a^{-\varepsilon} < \log_a(y/y_0) < \log_a a^{\varepsilon}$, odnosno sa

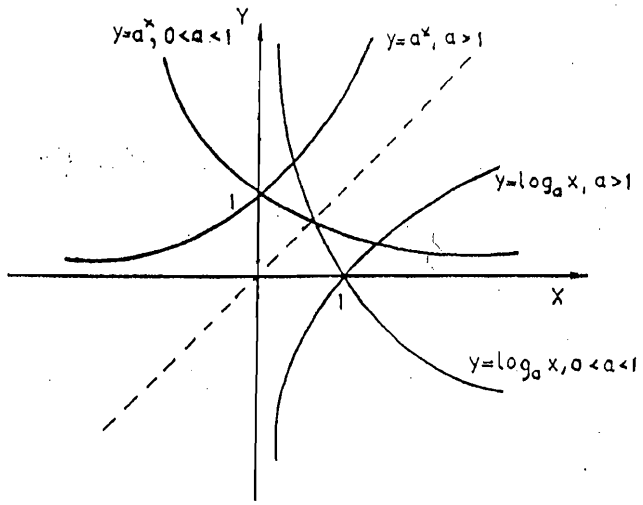
$$\begin{aligned} y_0 a^{-\varepsilon} < y < y_0 a^{\varepsilon} \quad &\text{za} \quad a > 1 \\ (y_0 a^{\varepsilon} < y < y_0 a^{-\varepsilon} \quad &\text{za} \quad 0 < a < 1). \end{aligned}$$

U oba slučaja dobija se $\lim_{y\to y_0} \log_a y = \log_a y_0$. ■

Za $a = e$ uvodi se posebna oznaka $\ln = \log_e$*.

* $\ln$ = logarithmus naturalis

Grafici nekih eksponencijalnih i logaritamskih funkcija prikazani su na slici 1.



Sl. 4.3.1

Za proizvoljno $\alpha \in \mathbf{R}$ stavimo $1^\alpha = 1$. Izraz a^x je tada definisan za sve $a > 0$ i $x \in \mathbf{R}$. Ako sada fiksiramo eksponent, a pustimo da se osnova menja, u uobičajenim oznakama dolazimo do sledeće definicije.

DEFINICIJA 4.3.3 STEPENA F-C

Za $\alpha \in \mathbf{R}$, funkcija $x \mapsto x^\alpha$ definisana na $(0, +\infty)$ naziva se *stepenom funkcijom* sa eksponentom α.

Osnovna svojstva stepene funkcije lako slede iz osobina eksponencijalne i logaritamske funkcije. Naime, važi

STAV 4.3.3

Neka je $x > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Tada:*

1° $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$;

2° $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;

3° $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;

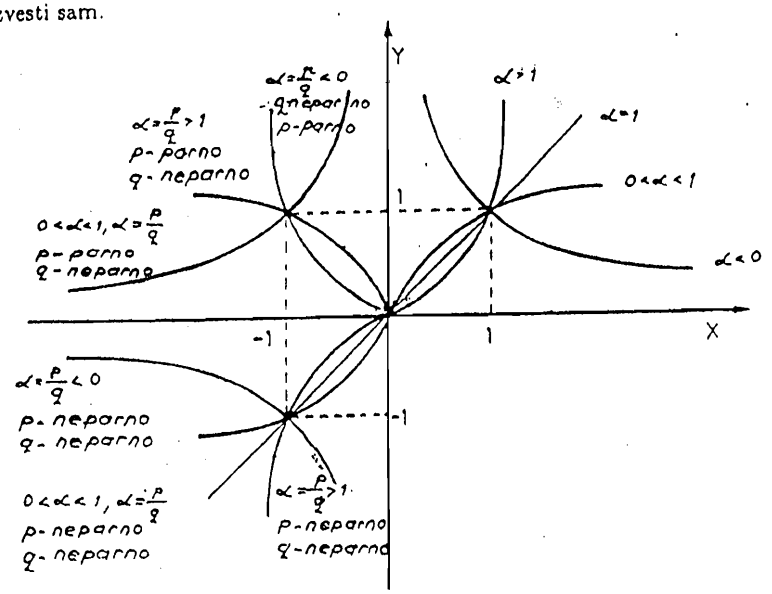
4° *za* $\alpha > 0$ *funkcija* $x \mapsto x^\alpha$ *je strogo rastuća;*
za $\alpha < 0$ *funkcija* $x \mapsto x^\alpha$ *je strogo opadajuća;*

5° *za* $\alpha \neq 0$ *funkcija* $x \mapsto x^\alpha$ *preslikava* $(0, +\infty)$ *na* $(0, +\infty)$. ■

Za neke vrednosti α oblast definisanosti funkcije $x \mapsto x^\alpha$ se može proširiti. Tako, na primer, ako je $\alpha = p/q$ racionalan broj i njegov imenilac q je neparan, možemo za $x < 0$ staviti

$$x^\alpha = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{ako je } p \text{ paran,} \\ -|x|^\alpha, & \text{ako je } p \text{ neparan.} \end{cases}$$

Ako je $\alpha > 0$ još stavljamo $0^\alpha = 0$. Osobine ovako proširene funkcije čitalac će lako izvesti sam.



Sl. 4.3.2

Grafici stepenih funkcija za neke α dati su na slici 2.

4.4. TRIGONOMETRIJSKE I INVERZNE TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Trigonometrijske funkcije sin, cos, tg i ctg nećemo posebno definisati u ovoj knjizi, već ćemo podrazumevati da je poznato njihovo uvođenje pomoću trigonometrijskog kruga. Na taj način, u dokazima nekih stavova vezanih za njih moraćemo da se pozivamo na očiglednost. Takođe ćemo pretpostavljati da su poznate osnovne osobine tih funkcija (definisanost, parnost, periodičnost, ograničenost, monotonost, adicione formule i slično). Jedan mogući način strogog uvođenja takvih funkcija opisan je u zadatku 12.

Dokažimo prvo sledeće dve jednostavne nejednakosti:

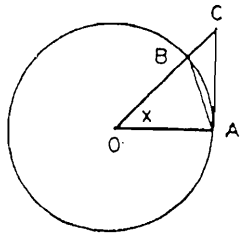
(1) $$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{za} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

(2) $$|\sin x| \leqslant |x| \quad \text{za} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Za dokaz relacije (1) uočimo u jediničnom (trigonometrijskom) krugu ugao $x = \angle BOA$, tetivu AB i tangentu AC u tački A

(v. sliku 1). Tada je površina trougla AOB manja od površine kružnog isečka AOB, a ova manja od površine trougla AOC, odakle je

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$



Sl. 4.4.1

što dokazuje nejednakost (1).

Nejednakost (2) za $0 \leqslant x < \pi/2$ sledi iz (1). Za $-\pi/2 < x < 0$ ona sledi zbog neparnosti funkcija x i $\sin x$. Za $|x| \geqslant \pi/2$ ona je trivijalna, jer je tada $|\sin x| \leqslant 1 < |x|$.

Iskoristimo izvedene nejednakosti za dokaz sledeća dva jednostavna, ali važna stava.

STAV 4.4.1

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \quad \text{za} \quad a \in \mathrm{R}.$$

Dokaz.

Tvrđenje sledi iz

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|. \quad \blacksquare$$

STAV 4.4.2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dokaz.

Za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ iz (1) sledi $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$, odnosno

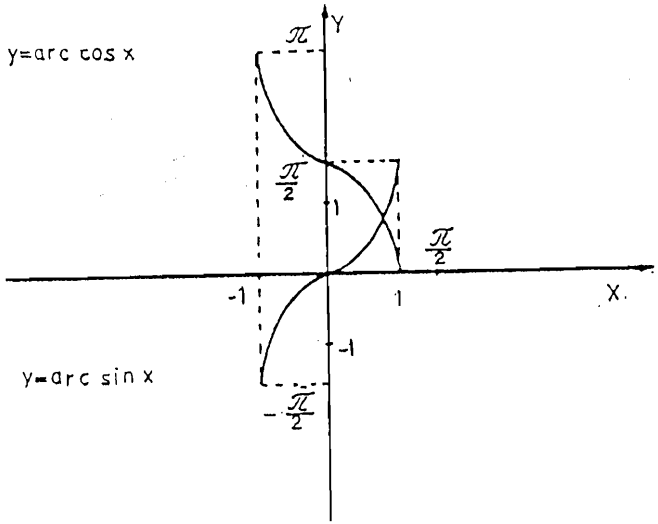
$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x,$$

odakle

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|,$$

pri čemu ova poslednja nejednakost ostaje da važi i za $-\pi/2 < x < 0$. Iz te nejednakosti neposredno sledi tvrđenje stava. $\blacksquare$

Nijedna od pomenutih trigonometrijskih funkcija, posmatrana na celoj svojoj oblasti definisanosti, očigledno nije injektivna, te ne može imati inverznu funkciju. Međutim, određene restrikcije tih funkcija su bijekcije, te su im inverzne funkcije definisane.



Sl. 4.4.2

DEFINICIJA 4.4.1

1° Neka je $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ restrikcija funkcije sin. Inverznu funkciju $f_1^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ označavamo sa arcsin. Dakle,

$$\begin{aligned} &\arcsin(\sin x) = x \quad \text{za} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ &\sin(\arcsin x) = x \quad \text{za} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned} \tag{3}$$

2° Neka je $f_2 : [0, \pi] \to [-1, 1]$ restrikcija funkcije cos. Inverznu funkciju $f_2^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ označavamo sa arccos. Dakle,

$$\begin{aligned} &\arccos(\cos x) = x \quad \text{za} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ &\cos(\arccos x) = x \quad \text{za} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned} \tag{4}$$

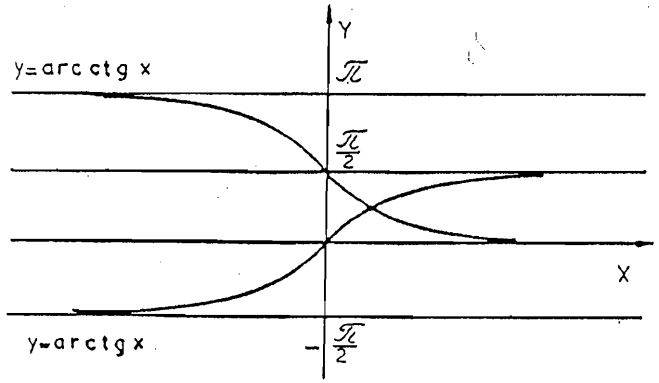
3° Neka je $f_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathrm{R}$ restrikcija funkcije tg. Inverznu funkciju $f_3^{-1} : \mathrm{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ označavamo sa arctg. Dakle,

$$\begin{aligned} &\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{za} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ &\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{za} \quad x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

4° Neka je $f_4\colon (0,\pi) \to \mathrm{R}$ restrikcija funkcije ctg. Inverznu funkciju $f_4^{-1}\colon \mathrm{R} \to (0,\pi)$ označavamo sa arcctg. Dakle,

$$\begin{aligned} &\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \text{za} \quad 0 < x < \pi, \\ &\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \text{za} \quad x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Jednim imenom funkcije arcsin, arccos, arctg i arcctg nazivamo *inverznim trigonometrijskim funkcijama.*



Sl. 4.4.3

Lako je proveriti da su sve funkcije f_1, f_2, f_3, f_4 bijekcije, tj. da je navedena definicija korektna. Istaknimo da definicione relacije (3), (4), (5) i (6) ne važe van navedenih intervala za promenljivu x (s tim u vezi videti zadatak 17). Grafici uvedenih funkcija dati su na slikama 2 i 3.

Polarne koordinate i trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Za svaku tačku $(x,y) \in \mathrm{R}^2$ za koju je $x^2+y^2 \neq 0$ važi

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Odatle se može izvesti da postoji i da je jedinstveno određen broj $\varphi \in [0, 2\pi)$, takav da je

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(Umesto intervala $[0, 2\pi)$ može se uzeti bilo koji drugi poluzatvoreni interval dužine 2π, na primer $(-\pi, \pi]$.) Tako uvedeni broj φ zovemo *polarnim uglom* tačke (x,y), a broj $r = \sqrt{x^2+y^2}$ zovemo *polarnim radijusom* ili *potegom* te tačke. Brojevi r

i φ nazivaju se *polarnim koordinatama* te tačke i jasno je da je oni jednoznačno određuju. Važi

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

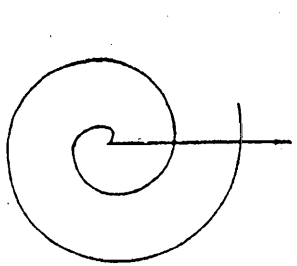
i

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

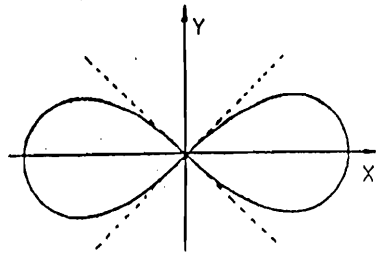
Pomoću polarnih koordinata mogu se zadavati krive u ravni. Naime, ako je između r i φ zadata neka veza, na primer eksplicitnom jednačinom oblika $r = f(\varphi)$, gde je $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$, onda skup tačaka u ravni čije polarne koordinate r i φ zadovoljavaju tu relaciju može predstavljati neku krivu.

PRIMERI 4.4.1

1° Jednačina $r = a\varphi$, $a = \text{const} > 0$ predstavlja *Arhimedovu spiralu*, sl. 4.



Sl. 4.4.4



Sl. 4.4.5

2° Jednačina $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ u pravouglim koordinatama x, y, posle prelaza na polarne koordinate r i φ dobija oblik $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ i predstavlja *Bernulijevu lemniskatu*, sl. 5. Primetimo da ugao φ u toj vezi, zbog zahteva $\cos 2\varphi \geqslant 0$, može uzimati vrednosti samo u jednom od intervala $[0, \pi/4]$, $[3\pi/4, 5\pi/4]$ ili $[7\pi/4, 2\pi)$, što određuje deo ravni u kojem se kriva nalazi. ▲

Neka je sada $z = x + iy \neq 0$ kompleksan broj. Polarne koordinate r i φ tačke (x,y) kompleksne ravni zovemo *modulom* i *argumentom* broja z i pišemo $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. Zapis

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

zovemo *trigonometrijskim oblikom* kompleksnog broja z.

STAV 4.4.3

1° *Ako je* $z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $j = 1, 2$, *onda je* $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$.

2° *(Moavr*) Ako je* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *i* $n \in \mathrm{N}$, *onda je* $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

* A. de Moivre (1667–1754), engleski matematičar

3° *Ako je* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *i* $n \in \mathbf{N}$, *onda su sva rešenja jednačine* $w^n = z$ *data sa*

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dokaz.

Tvrđenje 1° se direktno proverava, a 2° sledi iz njega indukcijom. Dokažimo 3°. Potražimo rešenja jednačine $w^n = z$ u obliku $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Iz 2° dobijamo

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

odnosno

$$\rho^n = r \quad \text{i} \quad \cos n\theta = \cos\varphi,\ \sin n\theta = \sin\varphi.$$

Odatle je $\rho = \sqrt[n]{r}$ i $n\theta = \varphi + 2k\pi$ za neko $k \in \mathbf{Z}$. No, jasno je da međusobno različite vrednosti za θ u intervalu $[0, 2\pi)$ odatle dobijamo samo za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ i to su upravo $\theta = (\varphi + 2k\pi)/n$. ■

4.5. KOŠIJEV PRINCIP EGZISTENCIJE LIMESA

Košijev princip konvergencije nizova (teorema 3.1.1) ima svoj analogon u teoriji graničnih vrednosti realnih funkcija.

TEOREMA 4.5.1

Funkcija realne promenljive $f: A \to \mathbf{R}$ *ima konačnu graničnu vrednost u tački* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *(koja je tačka nagomilavanja skupa* A*) ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji okolina* U *tačke* a, *takva da*

$$(\forall x', x'' \in A)(x', x'' \in \mathring{U} \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon).$$

Dokaz.

Dokažimo najpre da je navedeni uslov neophodan za egzistenciju konačne granične vrednosti funkcije f u tački a. Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}$, tada za dato $\varepsilon > 0$ postoji okolina U tačke a, takva da je $|f(x) - b| < \varepsilon/2$ za sve $x \in \mathring{U} \cap A$. Neka su x', $x'' \in \mathring{U} \cap A$ dve proizvoljne tačke. Za njih važi

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

U dokazu da je dati uslov dovoljan za postojanje konačnog $\lim_{x\to a} f(x)$ iskoristićemo Košijevu teoremu 3.3.1, kao i teoremu 2.1, prema kojoj je za postojanje tog limesa dovoljno da svaki niz oblika $(f(x_n))$ $(x_n \in A \setminus \{a\}, \lim_{n\to\infty} x_n = a)$ konvergira istom broju. Štaviše (v. zadatak 4), dovoljno je dokazati samo da svaki takav niz *ima* (konačnu) graničnu vrednost.

Neka je, dakle, (x_n) proizvoljan niz za koji je $x_n \in A \setminus \{a\}$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Za dato $\varepsilon > 0$ odredimo okolinu U tačke a koja ima osobinu opisanu u formulaciji teoreme. Izaberimo zatim prirodan broj n_0, takav da je $x_n \in \mathring{U}$ za sve $n > n_0$. Ako su n' i n'' dva takva indeksa, biće $|f(x'_n) - f(x''_n)| < \varepsilon$, što dokazuje da je niz $(f(x_n))$ Košijev. On je, prema tome, i konvergentan (konačnoj granici), što je i trebalo dokazati. ■

Prethodnoj teoremi može se dati i druga formulacija ako se koristi pojam oscilacije funkcije.

DEFINICIJA 4.5.1

Oscilacija funkcije $f: X \to \mathbf{R}$ na skupu $A \subset X$ je

$$\omega(f, A) = \sup_{x_1, x_2 \in A} |f(x_1) - f(x_2)| = \sup\{\, |f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in A \,\}.$$

PRIMER 4.5.1

(a) $\omega(\sin, \mathbf{R}) = 2$; (b) $\omega(\operatorname{sgn}, (0, +\infty)) = 0$; (c) $\omega(\operatorname{sgn}, [0, +\infty)) = 1$; (d) $\omega(\operatorname{arctg}, \mathbf{R}) = \pi$; (e) $\omega\left(\operatorname{tg}, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = +\infty$. ▲

POSLEDICA 4.5.1

Funkcija realne promenljive $f: A \to \mathbf{R}$ *ima konačnu graničnu vrednost u tački* $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *(koja je tačka nagomilavanja skupa* A*) ako i samo ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji okolina* U *tačke* a, *takva da je* $\omega(f, \mathring{U} \cap A) < \varepsilon$. ■

PRIMER 4.5.2

Pomoću Košijevog principa dokažimo da funkcija $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ data sa $f(x) = \sin(1/x)$ nema graničnu vrednost kad $x \to 0$. Za to je dovoljno izabrati dva niza:

$$x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{i} \quad x''_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi},$$

koji očigledno konvergiraju ka nuli. Zbog toga se u svakoj okolini U tačke 0 mogu naći članovi oba niza, a kako je $f(x'_n) = 1$, $f(x''_n) = -1$, to odatle sledi da je $\omega(f, \mathring{U}) \geqslant 2$ (lako je videti da je $\omega(f, \mathring{U}) = 2$), te ta oscilacija ne može biti proizvoljno mala. ▲

4.6. GRANIČNA VREDNOST SLOŽENE FUNKCIJE

Pre nego što formulišemo teoremu o nalaženju limesa složene funkcije, posmatrajmo sledeća dva primera.

PRIMERI 4.6.1

1° Neka je $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$ i $g: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(y) = \dfrac{\sin y}{y}$. Tada je $g \circ f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x}$; pored toga je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ i $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$. Pomoću naredne teoreme dokazaćemo da je i $\lim_{x\to 0}(g \circ f)(x) = 1$, tj. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$.

2° Neka je $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$ i $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(y) = |\operatorname{sgn} y| = \begin{cases} 1, & \text{za } y \neq 0, \\ 0, & \text{za } y = 0. \end{cases}$$

Tada je $g \circ f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(g \circ f)(x) = 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$, zatim $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y \to 0} g(y) = 1$, ali je $\lim_{x \to 0}(g \circ f)(x) = 0 \neq 1$. ▲

Na osnovu primera 1.2° zaključujemo da uslovi $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$ nisu dovoljni da bi bilo $\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = c$, tj. da bismo $\lim_{x \to a} g(f(x))$ mogli da nađemo „uvođenjem smene $y = f(x)$". Jedan dovoljan uslov koji takav postupak opravdava daje sledeća

TEOREMA 4.6.1

Neka je:

1° $B \subset \mathbf{R}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* B, $g: B \to \mathbf{R}$ *i* $\lim_{y \to b} g(y) = c$;

2° $A \subset \mathbf{R}$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$ *tačka nagomilavanja skupa* A, $f: A \to \mathbf{R}$ *i za svaku okolinu* V *tačke* b *postoji okolina* U *tačke* a, *takva da je* $f(\mathring{U}) \subset \mathring{V}$.

Tada je $\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = c$.

Dokaz.

Za proizvoljnu okolinu W tačke c, zbog $\lim_{y \to b} g(y) = c$, postoji okolina V tačke b za koju je $g(\mathring{V}) \subset W$. Po pretpostavci, sada se može naći okolina U tačke a, takva da je $f(\mathring{U}) \subset \mathring{V}$. Tada je

$$(g \circ f)(\mathring{U}) = g(f(\mathring{U})) \subset g(\mathring{V}) \subset W,$$

što dokazuje da je $\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = c$. ■

Ostavljamo čitaocu da proveri da su uslovi ove teoreme u primeru 1.1° ispunjeni, pa je zaista $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$, dok u primeru 1.2° ti uslovi nisu ispunjeni.

Uslovi drugog tipa koji takođe obezbeđuju jednostavno nalaženje limesa složene funkcije biće opisani u odeljku 5.2.

Evo sada jednog važnog primera primene upravo dokazane teoreme.

STAV 4.6.1

(a) $\lim_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$; *(b)* $\lim_{x \to -\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$; *(c)* $\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Dokaz.

(a) Neka je $B = \mathbf{N}$, $g_1, g_2: B \to \mathbf{R}$ funkcije date sa

$$g_1(n) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \quad g_2(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Poznato je (v. odeljak 3.4) da je $\lim_{n \to \infty} g_1(n) = \lim_{n \to \infty} g_2(n) = e$.

Neka je dalje $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 1\}$, $f: A \to \mathbf{N}$ funkcija data sa $f(x) = [x]$. Očigledno je $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Uslov teoreme 1 je ispunjen: za svaku okolinu

$V = \{n \in \mathbf{N} \mid n > n_0\}$ tačke $+\infty$ u skupu B postoji okolina $U = \{x \in \mathbf{R} \mid x > n_0 + 1\}$ tačke $+\infty$ u skupu A, takva da je $f(\mathring{U}) \subset \mathring{V}$ (kad su u pitanju okoline tačke $+\infty$, nema razlike između U i $\mathring{U}$, odnosno V i $\mathring{V}$). Zato funkcije

$$(g_1 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}, \quad (g_2 \circ f)(x) = \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

imaju limes jednak e kad $x \to +\infty$. Kako je, međutim, za svako $x > 1$ ispunjeno

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

to tvrđenje sledi iz stava 2.6.

(b) Koristeći smene $t = -x$ i $u = t - 1$ dobija se sledeći niz jednakosti:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \to +\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t$$
$$= \lim_{u \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u+1} = \lim_{u \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \cdot \lim_{u \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right) = e.$$

(c) Iz (a), odnosno (b), koristeći smenu $t = 1/x$, dobijamo $\lim_{t \to +0}(1+t)^{1/t} = e$, odnosno $\lim_{t \to -0}(1+t)^{1/t} = e$. Odatle je $\lim_{t \to 0}(1+t)^{1/t} = e$. ■

PRIMERI 4.6.2

1° $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$. Specijalno, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Zaista, dovoljno je uzeti $f(x) = (1+x)^{1/x}$ i $g(y) = \log_a y$ i primeniti prethodni stav, stav 3.2.5° i teoremu o smeni promenljive u limesu.

2° $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$. Specijalno, $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Primenjuje se teorema 1 na funkcije $f(x) = a^x - 1$ i $g(y) = y/\log_a(1+y)$ i koristi prethodni primer.

3° Slično se dokazuje $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, pomoću jednakosti

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x},$$

koja važi za $\alpha \neq 0$. Za $\alpha = 0$ tvrđenje je trivijalno. ▲

4.7. GRANIČNA VREDNOST MONOTONE FUNKCIJE

Kao i Košijev princip konvergencije, i princip konvergencije monotonih nizova (teorema 3.4.1) ima svoj analogon u teoriji graničnih vrednosti realnih funkcija.

TEOREMA 4.7.1

Neka je $f: A \to \mathrm{R}$ rastuća funkcija realne promenljive i neka su $i = \inf A$ i $s = \sup A$ tačke nagomilavanja skupa A. Tada postoje $\lim_{x \to s} f(x)$ i $\lim_{x \to i} f(x)$. Da bi prvi od tih limesa bio konačan neophodno je i dovoljno da funkcija f na skupu A bude ograničena odozgo; analogno važi za drugi od tih limesa.

Analogna tvrđenja važe za opadajuće funkcije.

Dokaz.

Označimo $b = \sup\{ f(x) \mid x \in A \}$ i dokažimo da je $b = \lim_{x \to s} f(x)$. Razmotrimo dva slučaja.

Ako je f odozgo ograničena na A, tada je $b < +\infty$. Prema osobini supremuma, za svako $\varepsilon > 0$ može se naći $x_0 \in A$, takav da je $b - \varepsilon < f(x_0) \leqslant b$. Zbog monotonije je tim pre $b - \varepsilon < f(x) \leqslant b$ za sve $x \in A$, $x_0 \leqslant x \leqslant s$. Time je dokazano da je $b = \lim_{x \to s} f(x)$.

Ako f nije ograničena odozgo, tada je $b = +\infty$ i za svako $M \in \mathrm{R}$ postoji $x_0 \in A$, takvo da je $f(x_0) > M$. Ponovo zbog monotonije je $f(x) > M$ za sve $x \in A$, $x_0 \leqslant x \leqslant s$, odakle sledi $\lim_{x \to s} f(x) = +\infty$.

Ostali delovi teoreme dokazuju se analogno. ■

Naravno, ne može se garantovati postojanje limesa monotone funkcije f u tačkama različitim od supremuma i infimuma njene oblasti definisanosti. Na primer, funkcija data sa

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{za } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x + 1, & \text{za } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

mada strogo rastuća na $[0, 2]$, nema graničnu vrednost u tački $x = 1$. Jedino što važi jeste

POSLEDICA 4.7.1

Neka je $f: A \to \mathrm{R}$ monotona funkcija realne promenljive i neka je a tačka nagomilavanja skupa $\mathrm{R}_a^- \cap A = \{ x \in A \mid x < a \}$ (odn. $\mathrm{R}_a^+ \cap A = \{ x \in A \mid x > a \}$). Tada postoji $\lim_{x \to a-0} f(x)$ (odn. $\lim_{x \to a+0} f(x)$).

Dokaz.

Dovoljno je posmatrati restrikcije funkcije f na skupove $\mathrm{R}_a^- \cap A$ (odnosno $\mathrm{R}_a^+ \cap A$). ■

4.8. ASIMPTOTSKE OZNAKE o, O, ~ I NJIHOVE OSOBINE

Kada se upoređuje ponašanje neke funkcije u okoline neke fiksirane (konačne ili beskonačne) tačke (u kojoj sama funkcija ne mora biti definisana) sa ponašanjem neke druge (obično jednostavnije) funkcije, kažemo da se ispituje *asimptotsko ponašanje* prve funkcije u okolini te tačke. Pri tom se, između ostalih, koriste oznake o, O i $\sim$ o čijim osobinama će biti reči u ovom odeljku.

U daljem tekstu a će biti neka fiksirana vrednost iz $\overline{\mathrm{R}}$ i uvek ćemo podrazumevati da su sve funkcije o kojima se govori u svakom konkretnom slučaju definisane na skupu čija je a tačka nagomilavanja. Pored toga, ako drugačije nije naznačeno, podrazumevaćemo da je argument takvih funkcija označen sa x.

DEFINICIJA 4.8.1

Kažemo da je funkcija f *beskonačno mala* u odnosu na funkciju g kad $x \to a$ i pišemo

$$f = o(g) \quad (x \to a) \tag{1}$$

ako postoji okolina U tačke a, takva da je $f(x) = \alpha(x)g(x)$ za $x \in \mathring{U}$, gde je α beskonačno mala funkcija kad $x \to a$. Oznaka (1) čita se kao „f je malo o od g kad $x \to a$“.

Primetimo da u ovoj definiciji nije neophodno da same funkcije f i g budu beskonačno male. Ako one to jesu, govoriće mo da je *f beskonačno mala višeg reda* u odnosu na g kad $x \to a$. Moguće je i da f i g (ili neka od njih) budu beskonačno velike (pojam beskonačno velikog *niza* definisan je u zadatku 3.4; pojam beskonačno velike funkcije definiše se na sličan način). Ako je, na primer, f beskonačno velika ($x \to a$) i važi $f = o(g)$ ($x \to a$), kažemo da je *g beskonačno velika višeg reda* u odnosu na f ($x \to a$).

PRIMER 4.8.1

Očigledno je $x^2 = o(x)$ ($x \to 0$), pa je x^2 beskonačno mala višeg reda u odnosu na x kad $x \to 0$. S druge strane je $x = o(x^2)$ ($x \to \pm\infty$) jer je $x = \frac{1}{x} \cdot x^2$ za $x \neq 0$. Zato je x^2 beskonačno velika višeg reda u odnosu na x kad $x \to \pm\infty$. ▲

Primetimo da prethodni primer pokazuje i da je isticanje tačke a u oznaci (1) neophodno.

DEFINICIJA 4.8.2

Ako postoji okolina U tačke a i funkcija β koja je ograničena na $\mathring{U}$, takva da je $f(x) = \beta(x)g(x)$ za $x \in \mathring{U}$, pišemo $f = O(g)$ $(x \to a)$ i čitamo „f je veliko O od g kad $x \to a$“. Ako je istovremeno $f = O(g)$ i $g = O(f)$ $(x \to a)$, kažemo da su funkcije f i g *istog reda* kad $x \to a$.

PRIMERI 4.8.2

1° Kako je $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ (v. zadatak 14), funkcije $1-\cos x$ i x^2 su istog reda kad $x\to 0$.

2° $x\sin x = O(x)$ $(x\to\pm\infty)$. ▲

Očigledno je da važi

STAV 4.8.1

Funkcije f i g su istog reda kad $x\to a$ ako i samo ako postoje konstante c_1, $c_2>0$, takve da za neku okolinu U tačke a važi

$$c_1|g(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant c_2|g(x)| \quad \text{za } x\in\dot{U}. \ ■$$

Obično se prilikom ovakvog upoređivanja beskonačno malih i beskonačno velikih funkcija kao neka vrsta „etalona" koriste najjednostavnije funkcije — na primer, funkcije oblika $(x-a)^k$ $(x\to a)$, $a\in\mathbf{R}$, odnosno x^k $(x\to\pm\infty)$, gde $k\in\mathbf{R}$ (v. primere 1, 2 i 4). No, nije uvek moguće datu funkciju na taj način uporediti sa stepenom funkcijom.

PRIMERI 4.8.3

1° Prema primeru 3.4.1 i zadatku 3.16 važi $\lim_{n\to\infty} n^\alpha/a^n=0$ za $a>1$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Odatle se lako dobija (postupak je analogan dokazu stava 6.1) da je i $\lim_{\mathbf{R}\ni x\to\infty} x^\alpha/a^x=0$, što se na drugi način može zapisati kao

$$x^\alpha = o(a^x) \quad (x\to+\infty) \quad \text{za } \alpha\in\mathbf{R},\ a>1.$$

Drugim rečima, ne postoji $\alpha\in\mathbf{R}$, takvo da je $a^x=O(x^\alpha)$ $(x\to+\infty)$ ako je $a>1$.

2° Iz prethodnog primera, koristeći teoremu o smeni promenljive u limesu, dobijamo

$$\log_a x = o(x^\alpha) \quad (x\to+\infty) \quad \text{za } \alpha>0,\ a>0,\ a\neq 1$$

i

$$x^\alpha\log_a(x)=o(1) \quad (x\to+0) \quad \text{za } \alpha>0,\ a>0,\ a\neq 1.$$

Pri tom, na osnovu definicije 1, oznaka $f=o(1)$ $(x\to a)$ jednostavno znači da je $\lim_{x\to a} f(x)=0$. ▲

Važan specijalan slučaj kad su dve funkcije istog reda opisan je sledećom definicijom.

DEFINICIJA 4.8.3

Ako postoje okolina U tačke a i funkcija γ, takve da je $\lim_{x\to a}\gamma(x)=1$ i $f(x)=\gamma(x)g(x)$ za $x\in\dot{U}$, kažemo da se funkcija f asimptotski ponaša kao funkcija g $(x\to a)$ i pišemo $f\sim g$ $(x\to a)$ (čita se i „f je ekvivalentno sa g kad $x\to a$").

STAV 4.8.2

Relacija $\sim$ $(x\to a)$ na skupu funkcija definisanih u okolini tačke a jeste relacija ekvivalencije. ■

Važnu vezu između uvedenih pojmova daje sledeći

STAV 4.8.3

$f\sim g$ $(x\to a)$ ako i samo $f=g+o(g)$ $(x\to a)$.

Dokaz.

Sledi neposredno iz činjenice (stav 2.3) da je $\lim_{x\to a}\gamma(x)=1$ ako i samo ako je $\gamma=1+\alpha$, gde je α beskonačno mala kad $x\to a$. ■

PRIMER 4.8.4

Na osnovu stava 2.2 i primera 6.2 važi:

$$\sin x\sim x\ (x\to 0),\ \text{odnosno}\ \sin x = x+o(x)\ (x\to 0);$$
$$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0),\ \text{odnosno}\ \ln(1+x)=x+o(x)\ (x\to 0);$$
$$a^x-1\sim x\ln a\ (x\to 0),\ \text{odnosno}\ a^x=1+x\ln a+o(x)\ (x\to 0),\ a>0;$$
$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\ (x\to 0),\ \text{odnosno}\ (1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)\ (x\to 0),\ \alpha\in\mathbf{R}.\ ▲$$

Korišćenje uvedenih asimptotskih oznaka najčešće se zasniva na poznavanju upravo navedenih (i eventualno još nekih) osnovnih relacija i na jednostavnim osobinama tih oznaka. Neke od tih osobina navedene su u narednom stavu, a neke u zadatku 21.

STAV 4.8.4

1° $f\sim g$ $(x\to a)\implies o(f)=o(g)$ $(x\to a)$.
2° $f\cdot o(g)=o(fg)$ $(x\to a)$.
3° $o(f)+o(f)=o(f)$ $(x\to a)$.
4° $o(o(f))=o(f)$ $(x\to a)$.
5° $g=o(f)\implies g=O(f)$ $(x\to a)$.
6° $O(f)+O(f)=O(f)$ $(x\to a)$.

Dokaz.

Pre nego što dokažemo neke od ovih relacija, treba prvo da preciziramo njihov smisao. Naime, prema definiciji, $o(f)$ $(x\to a)$ nije oznaka za *jednu* funkciju, već za *skup* svih onih funkcija koje su beskonačno male u odnosu na f kad $x\to a$ — u tom smislu treba shvatiti, na primer, implikaciju 1°. Kad je u pitanju relacija 3°, ona praktično znači da je zbir dveju funkcija, beskonačno malih u odnosu na f kad $x\to a$, ponovo beskonačno mala u odnosu na f kad $x\to a$. To ujedno znači da se relacije u kojima se pojavljuju simboli o i O ne smeju čitati „zdesna ulevo": važi $x^2=o(x)$ $(x\to 0)$, ali naravno nema smisla napisati $o(x)=x^2$ $(x\to 0)$, jer ima i mnogo drugih funkcija koje su „malo o od x kad $x\to 0$".

1° Iz $f\sim g$ $(x\to a)$ sledi $f=\gamma g$, gde $\gamma(x)\to 1$ $(x\to a)$. Neka je $h=o(f)$ $(x\to a)$. Tada je $h=\beta f$, gde $\beta(x)\to 0$ $(x\to a)$, odakle $h=(\beta\gamma)g$, gde $(\beta\gamma)(x)=\beta(x)\gamma(x)\to 0$ $(x\to a)$, pa je $h=o(g)$ $(x\to a)$. Slično i obrnuto — iz $h=o(g)$ sledi $h=o(f)$, čime je dokazana jednakost $o(f)=o(g)$ $(x\to a)$.

3° Neka je $g_1=o(f)$ i $g_2=o(f)$ $(x\to a)$. Tada je $g_1=\beta_1 f$ i $g_2=\beta_2 f$, gde $\beta_1,\beta_2\to 0$ $(x\to a)$, pa je $g_1+g_2=(\beta_1+\beta_2)f$, gde $\beta_1+\beta_2\to 0$ $(x\to a)$, što znači da je i $g_1+g_2=o(f)$ $(x\to a)$.

4° Neka je $g=o(o(f))$ $(x\to a)$. To znači da je $g=o(h)$ $(x\to a)$, gde je h proizvoljna funkcija oblika $h=o(f)$ $(x\to a)$, tj. $h=\beta f$ za neku beskonačno malu

funkciju β $(x \to a)$. No, onda je $g = \gamma h = (\gamma\beta)f$, gde $\gamma \to 0$ $(x \to a)$, pa i $\gamma\beta \to 0$ $(x \to a)$, što znači da je $g = o(f)$ $(x \to a)$.

5° važi jer je svaka beskonačno mala funkcija lokalno ograničena. ■

Izvedena pravila ćemo najčešće koristiti prilikom određivanja graničnih vrednosti. Evo nekoliko primera.

PRIMERI 4.8.5

1°

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{[1+\alpha x+o(x)]-[1+\beta x+o(x)]}{[\alpha x+o(x)]-[\beta x+o(x)]}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha-\beta)x+o(x)}{(\alpha-\beta)x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=1 \quad (\alpha,\beta\in\mathbf{R},\ \alpha\neq\beta)$$

2°

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+x})=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x\left[1-\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)=-\frac{1}{2}$$

3° Neka je $a, b, c > 0$. Iz

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x\ln a+1+x\ln b+1+x\ln c+o(x)}{3}$$
$$=\frac{1}{x}\ln[1+x\ln\sqrt[3]{abc}+o(x)]=\ln\sqrt[3]{abc}+o(1)$$

sledi da je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\sqrt[3]{abc}+o(1)}=\sqrt[3]{abc}. \quad ▲$$

Ne treba, naravno misliti da se na ovaj način može naći svaki limes. Već, na primer, jednostavan limes oblika $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$ ovim postupkom bi se transformisao u $\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)-(x+o(x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^3}$ koji ne bismo znali da odredimo, jer za veličinu u brojiocu samo znamo da je beskonačno mala višeg reda od x $(x \to 0)$, ali ne i tačno kojeg reda. Očigledno da tu nedostaje preciznija informacija o ponašanju funkcija sin i tg u okolini tačke $x = 0$. Takve informacije o tim (i mnogim drugim) funkcijama moći ćemo da dobijemo korišćenjem diferencijalnog računa (v. odeljak 6.7).

ZADACI

1. Dokazati:
   1° funkcije sin, tg i ctg su neparne, a funkcija cos je parna;
   2° funkcija $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ je neparna, a $g(x) = (a^x+a^{-x})/2$, $a \in \mathbf{R}$, je parna.

2. Neka je f realna funkcija, definisana na simetričnom skupu $A \subset \mathbf{R}$. Dokazati da je funkcija $g(x) = [f(x)+f(-x)]/2$ parna, a $h(x) = [f(x)-f(-x)]/2$ neparna, pri čemu je $f(x) = g(x)+h(x)$ za $x \in A$.

3. Ispitati periodičnost i naći osnovne periode (ako postoje) funkcija: 1° $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ $(A, B, \omega \in \mathbf{R})$; 2° $f(x) = \sin x^2$; 3° $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; 4° $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x$.

4. Dokazati da ako za svaki niz (x_n) tačaka $x_n \in A\setminus\{a\}$ za koji je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, gde je $a \in \overline{\mathbf{R}}$ tačka nagomilavanja domena $A \subset \mathbf{R}$ funkcije $f: A \to \mathbf{R}$, postoji $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, tada postoji $\lim_{x\to a} f(x)$.

5. Neka su $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ i $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ polinomi. Dokazati:
   1° $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$, pri čemu je znak limesa pri parnom k određen znakom koeficijenta a_k, a pri neparnom k još i znakom beskonačnosti kojoj x teži;
   2° $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)/q(x) = \pm\infty$, a_k/b_m ili 0, u zavisnosti od toga da li je $k > m$, $k = m$ ili $k < m$. Znak limesa (u prvom slučaju) određuje se u zavisnosti od znaka a_k i b_m, a takođe (za $k-m$ neparno) u zavisnosti od znaka beskonačnosti kojoj x teži.

6. Neka su $f, g: A \to \mathbf{R}$ funkcije realne promenljive i a tačka nagomilavanja skupa A. Ako je $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbf{R}$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, dokazati:
   1° $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty$;
   2° $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{za } b > 0, \\ -\infty, & \text{za } b < 0; \end{cases}$
   3° $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$;
   4° $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{za } b > 0, \\ -\infty, & \text{za } b < 0. \end{cases}$

7. Dokazati:
   1° $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ $(a > 1)$;
   2° $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ $(0 < a < 1)$.

8. Dokazati:
   1° $\lim_{x\to+\infty}\log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to+0}\log_a x = -\infty$ $(a > 1)$;
   2° $\lim_{x\to+\infty}\log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to+0}\log_a x = +\infty$ $(0 < a < 1)$.

9. Dokazati stav 3.3.

10. 1° Dokazati da je niz $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ monoton i ograničen, tako da postoji $\lim_{n\to\infty} a_n = C$. Broj C naziva se *Ojlerovom konstantom* i prvih

nekoliko decimala su mu $C = 0,57721\ldots$. Na taj način je

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \alpha_n,$$

gde je (α_n) nula-niz.

2° Naći $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

11. Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. Dokazati da postoji i jednoznačno je određena funkcija $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava uslove:

1° $f(1) = a$; 2° $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$ za sve $x_0 \in \mathbf{R}$;

3° $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$ za sve $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

12. Dokazati da postoje i da su jednoznačno određene funkcije $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju uslove:

1° $f(x_1 + x_2) = f(x_1)g(x_2) + g(x_1)f(x_2)$,
$g(x_1 + x_2) = g(x_1)g(x_2) - f(x_1)f(x_2)$, $f^2(x) + g^2(x) = 1$;

2° $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f(\pi/2) = 1$, $g(\pi/2) = 0$;

3° za $0 < x < \pi/2$ je $0 < f(x) < x$.

13. Analogno stavu 4.1 dokazati:

1° $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$, $a \in \mathbf{R}$;

2° $\lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, $a \neq \pi/2 + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$;

3° $\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$, $a \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

14. Naći: 1° $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 2° $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

15. Naći $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\varphi}{2^k}$ za $\varphi \in \mathbf{R}$.

16. Dokazati:

1° $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ ako je $xy < 0$ ili ako je $xy > 0$ i $x^2 + y^2 \leqslant 1$;

2° $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, za $|x| \leqslant 1$;

3° $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ za $xy < 1$;

4° $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ za $x \in \mathbf{R}$;

5° $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ za $|x| < 1$;

6° $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ za $x \in \mathbf{R}$.

17. Dokazati da je za $k \in \mathbf{Z}$ ispunjeno:

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2k\pi, & \text{za } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ (2k+1)\pi - x, & \text{za } -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \end{cases}$$

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x + 2k\pi, & \text{za } 2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, \\ 2k\pi - x, & \text{za } (2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi. \end{cases}$$

18. Dokazati: 1° $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$;
2° $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$.

19. Naći granične vrednosti:

1° $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+ax+b}{x^2+a_1x+b_1}\right)^{Ax^2+Bx+C}$; 2° $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; 3° $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$;
4° $\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$; 5° $\lim_{x\to+0} x^x$; 6° $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

20. Dokazati da je za $x \in \mathbf{R}$: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}[\sin^2(n!\,\pi x)] = 1 - \chi(x)$, gde je χ Dirihleova funkcija.

21. Dokazati: 1° $o(cf) = o(f)$ $(x \to a)$ ako je $c = \text{const}$;

2° ako je $g(x) \neq 0$, onda je $\frac{o(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right)$ i $\frac{O(f)}{g} = O\left(\frac{f}{g}\right)$ $(x \to a)$;

3° $o(f + o(f)) = o(f)$ $(x \to a)$; 4° $o(f) + O(f) = O(f)$ $(x \to a)$;

5° $f = O(g)$ $(x \to a)$ ako i samo ako postoji konstanta c, takva da je u nekoj okolini tačke a ispunjeno $|f(x)| \leqslant c|g(x)|$.

22. Naći: 1° $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$; 2° $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}$;
3° $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^2 x}$; 4° $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

23. Naći red sledećih beskonačno malih:

1° $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}$ $(x \to +\infty)$;

2° $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$ $(x \to 0)$; 3° $f(x) = x^x - 1$ $(x \to 1)$.

Drugim rečima, na primer u slučaju 1°, naći pozitivan broj α, takav da je $f(x) \sim \text{const}/x^\alpha$ $(x \to +\infty)$ (v. definiciju 8.2).

24. Po pravoj Ox kotrlja se bez klizanja krug poluprečnika a. Kriva koju opisuje određena tačka periferije tog kruga zove se *cikloida*. Pokazati da se ona može parametarski opisati jednačinama

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Skicirati tu krivu.

25. Skicirati grafik *astroide* date parametarski pomoću $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t < 2\pi$.

26. Skicirati *hiperboličku*, odnosno *logaritamsku spiralu*, koje se zadaju polarnim jednačinama $r = a/\varphi$ $(a = \text{const} > 0)$, odnosno $r = ae^{m\varphi}$ $(a > 0, m \in \mathbf{R})$.

5. NEPREKIDNOST

U ovoj glavi govorićemo o jednom od osnovnih pojmova matematičke analize — pojmu neprekidne funkcije. Pri tom ćemo se (za sada) zadržati na slučaju realnih funkcija realne promenljive, mada se, kao što ćemo videti u devetoj glavi, taj pojam može uvesti i u mnogo opštijim situacijama.

5.1. NEPREKIDNOST I TAČKE PREKIDA

Intuitivno, neprekidna je ona funkcija kod koje dovoljno male promene vrednosti argumenta uzrokuju proizvoljno male promene vrednosti funkcije, drugim rečima, ona kod koje je vrednost funkcije proizvoljno blizu vrednosti u nekoj datoj tački, samo ako je vrednost argumenta dovoljno blizu toj tački. Kao što znamo iz prethodne glave, blizina se iskazuje pomoću pripadnosti odgovarajućim okolinama, pa tako za osnovnu uzimamo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 5.1.1

Za funkciju $f: A \to \mathrm{R}$ realne promenljive kažemo da je *neprekidna u tački* $a \in A$ ako za svaku okolinu V tačke $f(a)$ postoji okolina U tačke a (u skupu A), takva da je $f(U) \subset V$. Drugim rečima, f je neprekidna u a ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Primećujemo odmah da definicija neprekidnosti ima sličnosti sa definicijom granične vrednosti funkcije u tački. No, postoje i neke važne razlike. Prvo, tačka $a \in A$ u kojoj se govori o neprekidnosti funkcije f ne mora biti tačka nagomilavanja skupa A — ona, naprotiv, može biti *izolovana* tačka tog skupa, tj. može imati osobinu da u nekoj okolini $U(a)$ nema drugih tačaka skupa A osim nje same. Jasno je da se u tom slučaju ne može govoriti o graničnoj vrednosti $\lim_{x \to a} f(x)$; jasno je, takođe, da je u tom slučaju funkcija f uvek neprekidna u tački a, jer je $f(U(a)) = \{f(a)\} \subset V$ za svaku okolinu V tačke $f(a)$. No, to je trivijalan slučaj.

Druga važna razlika je u tome što kod definicije limesa ne pretpostavljamo da je funkcija f definisana u samoj tački a, pa čak i ako to ona jeste, vrednost $f(a)$, kao što znamo, ne utiče na samu vrednost $\lim_{x \to a} f(x)$.

Ako je, međutim, funkcija f definisana u tački a koja je pri tom tačka nagomilavanja njene oblasti definisanosti, tada između neprekidnosti funkcije f u tački a i njene granične vrednosti u toj tački postoji veza koju ćemo iskazati sledećim stavom.

STAV 5.1.1

Neka je $f: A \to \mathrm{R}$ funkcija realne promenljive i $a \in A$ tačka nagomilavanja skupa A. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

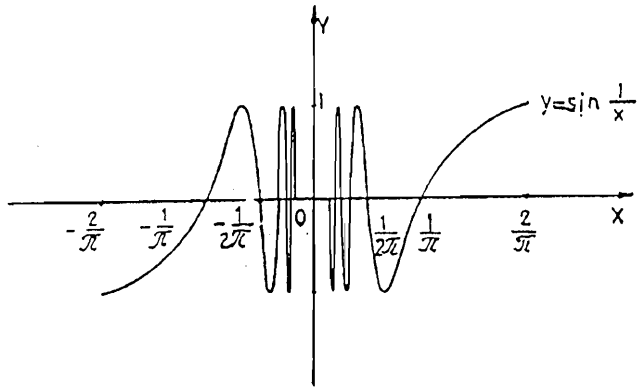
1° *funkcija f je neprekidna u tački a;*

2° $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

3° *za svaki niz (x_n), $x_n \in A$, za koji je $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ važi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.*

Dokaz.

Ekvivalentnost uslova 1° i 2° sledi neposredno iz definicije neprekidnosti i definicije 4.2.1 limesa, dok je 2° ekvivalentno sa 3° na osnovu ekvivalencije Košijeve i Hajneove definicije granične vrednosti (teorema 4.2.1). ■



Sl. 5.1.1

PRIMERI 5.1.1

1° Konstantna funkcija $f(x) = c$ $(x \in A)$ i identična funkcija $f(x) = x$ $(x \in A)$ neprekidne su u svakoj tački svoje oblasti definisanosti.

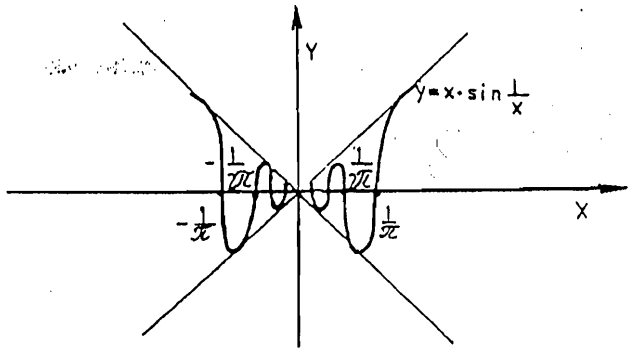
2° Na osnovu stava 4.3.1, eksponencijalna funkcija $x \mapsto a^x$ neprekidna je u svakoj tački $x_0 \in \mathrm{R}$.

Slično, logaritamska funkcija $x \mapsto \log_a x$ neprekidna je u svakoj tački $x_0 > 0$, na osnovu stava 4.3.2.

3° Na osnovu stava 4.4.1, funkcija $x \mapsto \sin x$ neprekidna je u svakoj tački $a \in \mathrm{R}$. Slično važi za funkcije cos, tg, ctg u svakoj tački u kojoj su one definisane (v. zadatak 4.13).

4° Iz primera 4.2.1 sledi da funkcije sgn i |sgn| nisu neprekidne u tački $x = 0$, dok Dirihleova funkcija χ nije neprekidna ni u jednoj tački $x \in \mathrm{R}$.

5° Funkcija $f\colon \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ data sa $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ za $x \neq 0$ i $f(0) = a$ nije neprekidna u tački 0, ma kako izabrali vrednost $a \in \mathrm{R}$, jer na osnovu primera 4.5.2 ne postoji $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.



Sl. 5.1.2

6° Posmatrajmo sada funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{ako je } x \neq 0, \\ 0, & \text{ako je } x = 0. \end{cases}$$

Lako je videti da je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (na primer, na osnovu stava 4.2.3), pa je f neprekidna u tački $x = 0$. Grafici funkcija iz ovog i prethodnog primera dati su na slikama 1 i 2.

7° Funkcija $x \mapsto [x]$ nije neprekidna u tačkama $a \in \mathrm{Z}$ jer $\lim_{x\to a}[x]$ u tim tačkama ne postoji.

8° Svaki niz realnih brojeva, shvaćen kao funkcija $f\colon \mathrm{N} \to \mathrm{R}$, neprekidan je u svakoj tački $n \in \mathrm{N}$, jer je svaka takva tačka izolovana u skupu N. ▲

Koristeći se pojmom oscilacije funkcije, uvedenim definicijom 4.5.1, možemo definiciji neprekidnosti dati još jednu ekvivalentnu formu. Primetimo najpre da ako sa $U_A^\delta(a)$ označimo δ-okolinu tačke a u skupu A (tj. skup $\{x \in A \mid |x-a| < \delta\}$), funkcija $\delta \mapsto \omega(f, U_A^\delta(a))$ biće za $\delta > 0$ rastuća i ograničena odozdo (nulom) funkcija od δ. Na osnovu teoreme 4.7.1 postoji $\lim_{\delta\to+0} \omega(f, U_A^\delta(a))$ — tu graničnu vrednost zvaćemo *oscilacijom* funkcije f u tački a i označavaćemo sa $\omega(f, a)$. Na osnovu posledice 4.5.1 sada očigledno važi

STAV 5.1.2

Funkcija $f\colon A \to \mathrm{R}$ je neprekidna u tački $a \in A$ ako i samo ako je $\omega(f, a) = 0$. ■

Za primer uzmimo ponovo funkciju $f(x) = \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = a \in \mathrm{R}$ $(|a| < 1)$. Iz primera 4.5.2 sledi da je $\omega(f, 0) = 2$, te ta funkcija nije neprekidna u tački $x = 0$.

Tačke prekida

DEFINICIJA 5.1.2

Za tačku $a \in A$ kažemo da je *tačka prekida* funkcije $f\colon A \to \mathrm{R}$ ako f nije neprekidna u toj tački.

Naglasimo da u skladu sa ovom definicijom tačka u kojoj neka funkcija nije definisana ne može biti njena tačka prekida (makar bila i tačka nagomilavanja njene oblasti definisanosti). Tako, na primer, tačka $x = 0$ *nije* tačka prekida funkcije $f(x) = 1/x$, jer, u skladu sa našom konvencijom datom u odeljku 4.1, za tu funkciju podrazumevamo da joj je domen $\mathrm{R} \setminus \{0\}$.

Na osnovu stava 1, tačke prekida realne funkcije f (među tačkama domena koje su ujedno tačke nagomilavanja tog domena) su bilo one tačke a kod kojih $\lim_{x\to a} f(x)$ ne postoji, bilo one kod kojih on nije jednak vrednosti $f(a)$. Uobičajeno je da se tačke prekida klasifikuju na sledeći način.

DEFINICIJA 5.1.3

Neka je $f\colon A \to \mathrm{R}$ i $a \in A$ tačka prekida funkcije f. Kaže se da je u tački a:

1° *prekid prve vrste* funkcije f ako postoje konačne granične vrednosti $\lim_{x\to a-0} f(x)$ i $\lim_{x\to a+0} f(x)$; ako je a tačka nagomilavanja samo jednog od skupova $\{x \in A \mid x > a\}$, $\{x \in A \mid x < a\}$, zahteva se samo postojanje jednog (odgovarajućeg) od tih limesa; specijalno, takav prekid je *otklonjiv* ako je još $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$, tj. ako postoji $\lim_{x\to a} f(x)$;

2° *prekid druge vrste* funkcije f ako nije prve vrste.

Termin „otklonjiv" prekid očigledno je u vezi sa činjenicom da se u slučaju takvog prekida može definisati nova funkcija $\tilde{f}$ pomoću

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in A \setminus \{a\}, \\ \lim_{x\to a} f(x), & \text{za } x = a, \end{cases}$$

koja je neprekidna u tački a, a sa funkcijom f se poklapa u svim ostalim tačkama njenog domena.

Razmotrimo ponovo prekidne funkcije iz primera 1.

4° Funkcija $\operatorname{sgn} x$ ima u tački $x = 0$ prekid prve vrste (neotklonjiv), dok funkcija $|\operatorname{sgn} x|$ u toj tački ima otklonjiv prekid. Funkcija χ ima prekid druge vrste u svakoj tački $x \in \mathrm{R}$.

5° Funkcija $f(x) = \sin(1/x)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = a$ ima prekid druge vrste u tački $x = 0$.

7° Funkcija $[x]$ ima prekid prve vrste u svakoj tački $n \in \mathrm{Z}$. Primetimo da je, međutim, u svakoj takvoj tački $\lim_{x\to n+0}[x] = [n]$. Takvim funkcijama pogodno je dati posebno ime.

DEFINICIJA 5.1.4

Za funkciju $f\colon A \to \mathrm{R}$ kažemo da je *neprekidna sleva (zdesna)* u tački $a \in A$ ako je $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ (odnosno $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$).

Dakle, funkcija $[x]$ neprekidna je zdesna u svim tačkama $x \in \mathbf{R}$.

Očigledno je da je funkcija neprekidna u nekoj tački ako i samo ako je neprekidna i sleva i zdesna u toj tački.

5.2. LOKALNA SVOJSTVA NEPREKIDNIH FUNKCIJA

Lokalnim ćemo nazivati ona svojstva neprekidne funkcije koja su u vezi sa ponašanjem te funkcije u nekoj okolini tačke neprekidnosti. Njihova izvođenja se uglavnom baziraju na osnovnim osobinama limesa izvedenim u odeljku 4.2. Tako, na primer, iz stavova 4.2.2 i 4.2.5 neposredno sledi

STAV 5.2.1

Neka je funkcija $f: A \to \mathbf{R}$ neprekidna u tački $a \in A$. Tada:

1° *postoji okolina U tačke a (u skupu A), takva da je f ograničena na U;*

2° *ako je $f(a) \neq 0$, postoji okolina U tačke a, takva da je za sve $x \in U$, $f(x)$ istog znaka kao $f(a)$.* ■

Slično se iz stava 4.2.4 izvode sledeća pravila o aritmetičkim operacijama sa neprekidnim funkcijama.

STAV 5.2.2

Neka su $f, g: A \to \mathbf{R}$ funkcije, neprekidne u tački $a \in A$. Tada su i funkcije $f+g$, fg i f/g neprekidne u tački a (poslednja ako je još $g(a) \neq 0$).

Dokaz.

Za prve dve funkcije tvrđenje neposredno sledi iz pomenutog stava. Što se količnika f/g tiče, potrebno je samo proveriti da je on uopšte definisan u nekoj okolini tačke a. To je, međutim, posledica dela 2° prethodnog stava. ■

Najzad, lako se izvodi i sledeće pravilo o neprekidnosti složene funkcije.

STAV 5.2.3

Neka su $A, B \subset \mathbf{R}$ i $f: A \to B$, $g: B \to \mathbf{R}$ realne funkcije. Ako je f neprekidna u tački $a \in A$ i g neprekidna u tački $f(a)$, tada je složena funkcija $h = g \circ f$ neprekidna u tački a.

Dokaz.

Za proizvoljnu okolinu W tačke $h(a) = g(f(a))$ postoji okolina V tačke $f(a)$, takva da je $g(V) \subset W$. Dalje, za tu okolinu V izaberimo okolinu U tačke a, takvu da je $f(U) \subset V$. Tada je očigledno

$$h(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

pa je funkcija h neprekidna u tački a. ■

PRIMERI 5.2.1

1° Polinomi i racionalne funkcije su neprekidne u svakoj tački svoje oblasti definisanosti. To neposredno sledi iz stava 2 i primera 1.1.1°.

2° Stepena funkcija $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$), kao kompozicija eksponencijalne i logaritamske funkcije (v. stav 4.3.3), neprekidna je u svakoj tački svog domena (shvatajući taj domen u proširenom smislu — v. kraj odeljka 4.3). ▲

Prethodni stav često se primenjuje prilikom odredivanja graničnih vrednosti kada u datim izrazima učestvuju neprekidne funkcije. U tom smislu njegova primena obično je jednostavnija od primene teoreme 4.6.1 o limesu složene funkcije. Na primer, ako treba odrediti $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ (v. primer 4.6.2), dovoljno je iskoristiti poznati rezultat $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ (stav 4.6.1) i neprekidnost logaritamske funkcije u tački e (primer 1.1.2°) da bi se dobio rezultat $\log_a e$. Slično se postupa u izvođenju ostalih rezultata iz primera 4.6.2. Navedimo još i sledeći

PRIMER 5.2.2

Neka je $\lim_{x\to a} u(x) = b > 0$ i $\lim_{x\to a} v(x) = c$. Tada je

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = b^c.$$

Zaista, iz $\lim_{x\to a} \ln u(x) = \ln b$ (neprekidnost logaritamske funkcije) sledi (na osnovu neprekidnosti eksponencijalne funkcije)

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim_{x\to a} v(x)\ln u(x)} = e^{c\ln b} = b^c. \quad ▲$$

5.3. GLOBALNA SVOJSTVA NEPREKIDNIH FUNKCIJA

Za razliku od lokalnih, globalna svojstva neprekidnih funkcija zavise od njihove neprekidnosti na nekom skupu tačaka (na primer, segmentu). Uvedimo najpre sledeću definiciju.

DEFINICIJA 5.3.1

Za funkciju $f: A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}$) kažemo da je *neprekidna na skupu A* ako je ona neprekidna u svakoj tački tog skupa.

Skup svih funkcija $f: A \to \mathbf{R}$ koje su neprekidne na A označavaćemo sa $C(A)$. Specijalno, ako je $A = [a, b]$, skup $C(A)$ označavaćemo sa $C[a, b]$.

Primetimo pri tom da ako je neka funkcija f definisana na skupu širem od $[a, b]$, da bi njena restrikcija $f|[a, b]$ pripadala $C[a, b]$ dovoljno je da f bude neprekidna na (a, b), neprekidna zdesna u tački a i neprekidna sleva u tački b.

Za realnu funkciju f kažemo da je *deo-po-deo neprekidna* na $[a, b]$ ako postoji konačno mnogo tačaka

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

tog segmenta, takvih da je f definisana na svakom od intervala (x_{j-1}, x_j), $j = 1, 2, \ldots, n$, i ima leve, odnosno desne limese u njihovim krajevima.

Globalna svojstva neprekidnih funkcija koja ćemo navesti u ovom odeljku bitno će zavisiti ne samo od neprekidnosti samih funkcija, već i od svojstava skupa na kome su one definisane. Prvo takvo svojstvo daje *Bolcano-Košijeva teorema o međuvrednosti.*

TEOREMA 5.3.1

Neka je $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija, $f(a) = A$, $f(b) = B$ i C proizvoljna vrednost između A i B. Tada postoji tačka $c \in [a,b]$, takva da je $f(c) = C$.

Specijalno, ako neprekidna funkcija f uzima vrednosti raznih znakova na krajevima segmenta $[a,b]$, tj. ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, tada postoji tačka $c \in [a,b]$, takva da je $f(c) = 0$.

Dokaz.

Očigledno je dovoljno dokazati teoremu u navedenom specijalnom slučaju, tj. za $f(a) \cdot f(b) < 0$; opšti slučaj se onda dobija kad se taj specijalni primeni na funkciju $\varphi(x) = f(x) - C$.

Pretpostavimo, dakle, da neprekidna funkcija f u krajevima segmenta $[a,b]$ ima vrednosti raznih znakova — na primer, neka je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Podelimo taj segment na pola tačkom $\frac{a+b}{2}$. Ako je u toj tački vrednost funkcije f jednaka nuli, nju ćemo uzeti za traženu tačku c. U suprotnom, jedan od odsečaka $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ imaće osobinu da na njegovim krajevima funkcija f ima vrednosti raznih znakova. Označimo taj odsečak sa $[a_1, b_1]$. Sa njim nastavimo opisani postupak (tj. podelimo ga na pola itd.). Kao rezultat ćemo ili na nekom koraku dobiti tačku c za koju je $f(c) = 0$ ili ćemo dobiti niz umetnutih odsečaka $[a_n, b_n]$ koji, prema lemi i stavu 2.7.1, ima za presek neku tačku $c \in [a,b]$. Jasno je da je pri tom $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$, a prema konstrukciji nizova (a_n) i (b_n) je za svako n ispunjeno $f(a_n) < 0$ i $f(b_n) > 0$. Odatle sledi (zbog neprekidnosti) $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0$ i $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0$, tj. $f(c) = 0$, čime je egzistencija tačke c dokazana. ■

Jasno je da ova teorema ništa ne govori o broju tačaka $c \in [a,b]$ u kojima može biti $f(c) = 0$ — njih očigledno može biti i više od jedne. Naglasimo takođe da, kao što smo već pomenuli, osim neprekidnosti funkcije f, da bi ta teorema važila, bitno je određeno svojstvo segmenta $[a,b]$ — sa njim ćemo se nešto detaljnije upoznati u glavi 9 kad budemo odgovarajuću teoremu izvodili u nešto opštijoj situaciji. Zasad navedimo sledeći

PRIMER 5.3.1

Funkcija $f: [0,1] \cup [2,3] \to \mathbf{R}$, data sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in [0,1], \\ -1, & \text{za } x \in [2,3], \end{cases}$$

neprekidna je i uzima vrednosti različitog znaka, ali ni u jednoj tački nije jednaka nuli. ▲

Sledeće svojstvo iskazuje se *Vajerštrasovom teoremom o ograničenosti neprekidne funkcije.*

TEOREMA 5.3.2

Ako je funkcija $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna, tada je ona ograničena na $[a,b]$ i postoje tačke tog segmenta u kojima ona postiže svoju maksimalnu, odnosno minimalnu vrednost.

Dokaz.

Dokažimo najpre ograničenost funkcije f na $[a,b]$. Pretpostavimo, suprotno, da ona nije ograničena; tada za svaki prirodan broj n postoji vrednost $x_n \in [a,b]$, takva da je $|f(x_n)| > n$. Niz tačaka (x_n) segmenta $[a,b]$ je ograničen, pa prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi 3.2.1 ima bar jednu tačku nagomilavanja, tj. postoji njegov podniz (x_{n_k}) koji ima graničnu vrednost $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$, pri čemu je očigledno $x_0 \in [a,b]$. Zbog neprekidnosti funkcije f takođe je $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, što je nemoguće, jer na osnovu izbora tačaka x_n važi $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$. Dobijena kontradikcija dokazuje ograničenost funkcije f na $[a,b]$.

Označimo sada

$$m = \inf\{ f(x) \mid x \in [a,b] \}, \quad M = \sup\{ f(x) \mid x \in [a,b] \};$$

prema upravo dokazanom delu teoreme, brojevi m i M su konačni. Dokažimo da na segmentu $[a,b]$ postoji tačka c, takva da je $f(c) = M$; tvrđenje za donju granicu m dokazuje se analogno.

Pretpostavimo, ponovo suprotno tvrđenju, da takva tačka c ne postoji. Tada je $f(x) < M$ za svako $x \in [a,b]$, pa je funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ neprekidna na $[a,b]$. Ponovo prema već dokazanom delu teoreme dobijamo da je funkcija φ ograničena na $[a,b]$:

$$\varphi(x) \leqslant \mu, \quad x \in [a,b] \quad \text{za neko } \mu > 0.$$

Odatle je, međutim, $f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}$ za sve $x \in [a,b]$, pa je broj $M - \frac{1}{\mu}$, koji je manji od M, majoranta skupa $\{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$, suprotno definiciji broja M. Na taj način je teorema dokazana. ■

Kao i kod prethodne teoreme, primetimo da su, osim neprekidnosti funkcije f, za dokaz navedene teoreme bila bitna i određena svojstva segmenta $[a,b]$ na kojem je ta funkcija bila definisana. Lako je navesti primere funkcija neprekidnih na intervalima (konačnim ili beskonačnim) koji nisu zatvoreni i koje ne zadovoljavaju neko od svojstava iz navedene teoreme.

PRIMER 5.3.2

Funkcija $f: (0,1] \to \mathbf{R}$, data sa $f(x) = 1/x$ nije ograničena, a funkcija $f: [0,1) \to \mathbf{R}$, data sa $f(x) = x$ (mada ograničena) ne dostiže na $[0,1)$ svoju maksimalnu vrednost. ▲

5.4 RAVNOMERNA NEPREKIDNOST

Pretpostavimo da je funkcija $f: A \to \mathbf{R}$ neprekidna na skupu $A \subset \mathbf{R}$, tj. neka zadovoljava sledeći uslov:

$$(\forall x_0 \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Jasno je da u tôj definiciji broj $\delta > 0$ koji biramo zavisi od ε, ali i od tačke x_0 i može se menjati sa promenom te tačke. Ako je skup A konačan, onda se od tih brojeva $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ može izabrati najmanji broj $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ koji će takođe biti pozitivan i za koji će važiti

$$(\forall x_0 \in A)(\forall x \in A)(|x - x_0| < \delta_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Međutim, ako je skup A beskonačan, nije sigurno da će takav pozitivan broj δ_0 postojati. Zato je opravdana sledeća

DEFINICIJA 5.4.1

Za funkciju $f: A \to \mathbf{R}$ kažemo da je *ravnomerno (uniformno) neprekidna na skupu* $A \subset \mathbf{R}$ ako se za svako $\varepsilon > 0$ može naći pozitivan broj $\delta = \delta(\varepsilon)$, takav da za svake dve tačke x_1, x_2 skupa A koje su na rastojanju manjem od δ, važi $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Dakle, uslov ravnomerne neprekidnosti funkcije f na skupu A se može zapisati kao

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in A)(|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon).$$

Jasno je da ako je neka funkcija ravnomerno neprekidna na nekom skupu A, onda je njena restrikcija ravnomerno neprekidna na svakom podskupu B skupa A, no obrnuto ne mora biti tačno (v. dalje primer 1.5°). Takođe, očigledno je da ako je neka funkcija f ravnomerno neprekidna na skupu A, onda je ona i neprekidna na njemu (tj. neprekidna je u svakoj njegovoj tački), no obrnuto ne mora da važi (v. dalje primere 1.3°, 1.4° i 1.5°).

PRIMERI 5.4.1

1° Funkcija $f(x) = \sin x$ ravnomerno je neprekidna na $\mathbf{R}$, što sledi iz

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sin x_1 - \sin x_2| \leqslant |x_1 - x_2|$$

za sve $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.

2° Funkcija $f(x) = 1/x$ ravnomerno je neprekidna na polupravoj $[1, \infty)$ jer za svaka dva broja x_1, x_2 sa te poluprave važi

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leqslant |x_1 - x_2|.$$

3° Funkcija definisana istim analitičkim izrazom kao prethodna, $f(x) = 1/x$, ali sa domenom $(0, 1]$, nije ravnomerno neprekidna (mada je neprekidna). Zaista,

uočimo dva niza brojeva: $x_n' = \frac{1}{n}$, $x_n'' = \frac{1}{2n}$ iz intervala $(0, 1]$. Kako je $|x_n' - x_n''| = \frac{1}{2n}$, to se ta razlika za dovoljno veliko $n \in \mathbf{N}$ može učiniti proizvoljno malom — manjom od svakog unapred datog broja $\delta > 0$. Međutim, razlika vrednosti funkcije f u tim tačkama

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = |n - 2n| = n$$

očigledno raste sa n, te uslov ravnomerne neprekidnosti nije ispunjen.

4° Na osnovu prethodnog primera moglo bi se pomisliti da je za neravnomernu neprekidnost funkcije $f(x) = 1/x$ na $(0, 1]$ „kriva" njena neograničenost. Međutim, takav zaključak bio bi pogrešan, jer, s jedne strane, postoje i neograničene funkcije koje su ravnomerno neprekidne (na primer, takva je funkcija $f(x) = x$ na $\mathbf{R}$), ali, s druge strane, i *ograničene* funkcije na *konačnom* intervalu koje nisu ravnomerno neprekidne — na primer, takva je funkcija $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, definisana takođe na $(0, 1]$. Da bismo to dokazali, dovoljno je posmatrati sledeća dva niza tačaka:

$$x_n' = \frac{1}{n\pi}, \qquad x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}.$$

Za njih očigledno važi $|x_n' - x_n''| \to 0$ $(n \to \infty)$ i $|f(x_n') - f(x_n'')| = 1$, pa zaključak sledi kao u prethodnom primeru.

5° Kao poslednji primer posmatrajmo funkciju $f(x) = x^2$, najpre na $\mathbf{R}$, a zatim na bilo kom segmentu $[-A, A]$ za $A \in \mathbf{R}$. U prvom slučaju lako se dobija da funkcija f nije ravnomerno neprekidna, na primer, posmatrajući nizove $x_n' = \sqrt{n+1}$, $x_n'' = \sqrt{n}$ za koje važi

$$\lim_{n\to\infty} |x_n' - x_n''| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

i $|f(x_n') - f(x_n'')| = 1$. Međutim, u drugom slučaju za svake dve tačke x_1, x_2 segmenta $[-A, A]$ važi

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant 2A|x_1 - x_2|,$$

pa je dovoljno za dato $\varepsilon > 0$ izabrati $\delta = \varepsilon/(2A)$ koje će zadovoljavati uslove definicije ravnomerne neprekidnosti. ▲

Iz navedenih primera jasno je da ispitivanje ravnomerne neprekidnosti nije uvek jednostavno, te bi bilo dobro imati neki opšti kriterijum koji obezbeđuje ravnomernu neprekidnost. Takav jednostavan kriterijum daje sledeća važna *Kantorova teorema o ravnomernoj neprekidnosti.*

TEOREMA 5.4.1

Svaka funkcija $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$, ravnomerno je neprekidna na njemu.

Dokaz.

Dokaz ćemo sprovesti korišćenjem Borel-Lebegove leme 2.7.3 o pokrivačima.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Za proizvoljnu tačku x segmenta $[a, b]$ postoji okolina $U(x) = (x - \delta, x + \delta)$ za koju važi

$$x_1 \in U(x) \implies |f(x_1) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ako su x_1 i x_2 dve tačke te okoline, za njih će važiti

$$(1) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x)| + |f(x) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Uočimo sada okolinu $\tilde{U}(x)$ dvostruko manjeg poluprečnika od okoline $U(x)$ — $\tilde{U}(x) = \left(x - \frac{1}{2}\delta,\ x + \frac{1}{2}\delta\right)$. Ako takvu okolinu konstruišemo za svaku tačku segmenta $[a, b]$, dobićemo sistem otvorenih intervala $\{\, \tilde{U}(x) \mid x \in [a, b] \,\}$ koji očigledno obrazuje pokrivač segmenta $[a, b]$. Prema lemi 2.7.3 postoji konačan potpokrivač tog pokrivača, tj. postoje tačke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$, takve da intervali

$$(2) \qquad \tilde{U}(x_i) = \left(x_i - \frac{1}{2}\delta_i,\ x_i + \frac{1}{2}\delta_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

takođe čine pokrivač segmenta $[a, b]$. Označimo sa δ najmanji od brojeva $\delta_i/2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i dokažimo da taj (pozitivan) broj zadovoljava uslove definicije ravnomerne neprekidnosti za funkciju f na $[a, b]$.

Neka su x' i x'' proizvoljne tačke iz $[a, b]$ za koje je $|x' - x''| < \delta$. Tačka x' pripada jednoj od okolina (2), tj. za neko i važi $|x' - x_i| < \delta_i/2$. Kako je $\delta \leqslant \delta_i/2$, to je zbog $|x' - x''| < \delta$ takođe i $|x' - x''| < \delta_i/2$, pa dobijamo $|x'' - x_i| < \delta_i$. Na taj način, tačke x' i x'' obe pripadaju okolini $U(x_i) = (x_i - \delta_i, x_i + \delta_i)$, pa na osnovu (1) zaključujemo da za njih važi $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, što je i trebalo dokazati. ■

Primetimo da smo, kao i u dokazima teorema 3.1 i 3.2, u dokazu Kantorove teoreme bitno koristili određeno svojstvo segmenta $[a, b]$ realne prave — u ovom slučaju to je bilo svojstvo izraženo Borel-Lebegovom lemom o pokrivačima. U glavi 9 videćemo da takvo svojstvo omogućava dokazivanje analogne teoreme i u opštijoj situaciji. Takođe primetimo da se pomenuti dokazi oslanjaju na osnovne leme 2.7.1, 2.7.2 i 2.7.3, koje smo sa svoje strane dokazali zahvaljujući aksiomi neprekidnosti realne prave.

Kantorovu teoremu ponekad je praktično iskazati koristeći termin „oscilacija funkcije" (v. definiciju 4.5.1). Iz Vajerštrasove teoreme 3.2 sledi da je oscilacija neprekidne realne funkcije f na *segmentu* $[c, d]$ jednaka razlici između njene najveće i najmanje vrednosti na tom segmentu:

$$\omega(f, [c, d]) = M - m, \quad \text{gde je } M = \max_{x \in [c,d]} f(x),\ m = \min_{x \in [c,d]} f(x).$$

Koristeći tu napomenu, jasno je da Kantorovu teoremu možemo iskazati na sledeći način.

POSLEDICA 5.4.1

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna na $[a, b]$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da ako je $[c, d]$ proizvoljan podsegment segmenta $[a, b]$ čija je dužina manja od δ, tada je oscilacija $\omega(f, [c, d])$ manja od ε. ■

Pojam ravnomerne neprekidnosti funkcije f opisaćemo još na jedan način — koristeći pojam modula neprekidnosti funkcije.

DEFINICIJA 5.4.2

Modulom neprekidnosti funkcije $f : A \to \mathbf{R}$ za dato $\delta > 0$ naziva se broj

$$\omega_f(\delta) = \sup\{\, |f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in A,\ |x_1 - x_2| < \delta \,\}.$$

Neposredno iz definicije sledi da modul neprekidnosti ima sledeća dva svojstva:

1° $\omega_f(\delta) \geqslant 0$;

2° $\omega_f(\delta)$ je rastuća funkcija od $\delta > 0$.

PRIMERI 5.4.2

1° Za funkciju $f(x) = x$ je $\omega_f(\delta) = \delta$ za svako $\delta > 0$.

2° Ako je $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ data sa $f(x) = x^2$, onda je, s jedne strane, za x_1, $x_2 \in [0, 1]$, $x_2 = x_1 - \delta$, $0 < \delta \leqslant 1$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = x_1^2 - (x_1 - \delta)^2 \leqslant 2\delta - \delta^2,$$

a, s druge strane, za $x_1 = 1$, $x_2 = 1 - \delta$, $0 < \delta \leqslant 1$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 1 - (1 - \delta)^2 = 2\delta - \delta^2.$$

Na taj način je $\omega_f(\delta) = 2\delta - \delta^2$ za $\delta < 1$.

3° Za funkciju $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, definisanu na $(0, 1]$, modul neprekidnosti je $\omega_f(\delta) = 2$ za svako $\delta > 0$, jer, s jedne strane, važi

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\sin\frac{1}{x_1} - \sin\frac{1}{x_2}\right| \leqslant 2$$

za sve $x_1, x_2 \in (0, 1]$, a, s druge strane, uzimajući nizove

$$x_n' = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \quad \text{i} \quad x_n'' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi},$$

slične posmatranim u primeru 1.4°, imamo da je $|x_n' - x_n''| < \delta$ za dovoljno veliko n, a $|f(x_n') - f(x_n'')| = 2$.

4° Neka je funkcija $f : (0, 1] \to \mathbf{R}$ data sa $f(x) = 1/x$. Uzmimo za fiksirano δ, $0 < \delta \leqslant 1$ brojeve x_1, x_2, takve da je $0 < x_1 \leqslant \delta$ i $x_2 = \delta$. Tada je $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$ i imamo

$$\omega_f(\delta) \geqslant \sup\left\{\, \frac{1}{x_1} - \frac{1}{\delta} \;\middle|\; 0 < x_1 < \delta \,\right\} = +\infty,$$

tj. $\omega_f(\delta) = +\infty$. ▲

Dokažimo sada pomenutu vezu između pojmova modula neprekidnosti i ravnomerne neprekidnosti.

STAV 5.4.1

Da bi funkcija $f: A \to \mathbf{R}$ bila ravnomerno neprekidna na skupu $A \subset \mathbf{R}$, neophodno je i dovoljno da za modul neprekidnosti $\omega_f(\delta)$ funkcije f na tom skupu važi

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0. \tag{3}$$

Dokaz.

Pretpostavimo najpre da je f ravnomerno neprekidna na A. Tada za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$, takvo da $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ povlači $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$ za sve $x_1, x_2 \in A$. Ako izaberemo proizvoljno δ za koje je $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$, imaćemo očigledno da je $\omega_f(\delta) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$. To znači da važi relacija (3).

Obrnuto je takođe jednostavno. ■

Primenjujući ovaj stav, ponovo dobijamo da su funkcije iz primera 2.1° i 2.2° ravnomerno neprekidne, a da funkcije iz primera 2.3° i 2.4° to nisu.

5.5. NEPREKIDNOST I MONOTONOST. NEPREKIDNOST INVERZNE FUNKCIJE

U ovom odeljku ispitaćemo najpre vezu između monotonosti i neprekidnosti realnih funkcija. Posledica 4.7.1 nam omogućava da lako dokažemo prvi deo sledećeg stava.

STAV 5.5.1

Neka je funkcija $f: A \to \mathbf{R}$ monotona na skupu $A \subset \mathbf{R}$. Tada ona može imati samo prekide prve vrste i to njih najviše prebrojivo mnogo.

Dokaz.

Po definiciji, ako je $a \in A$ tačka prekida funkcije f, ona je tačka nagomilavanja skupa A. Pretpostavimo, određenosti radi, da je ona tačka nagomilavanja za oba skupa $\{x \in A \mid x < a\}$ i $\{x \in A \mid x > a\}$. Ako to ne bi bio slučaj, dalji postupak bio bi analogan.

Na osnovu posledice 4.7.1 zaključujemo da postoje konačni $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ i $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, što dokazuje da su eventualni prekidi funkcije f svi prve vrste. Pri tom je očigledno

$$f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0) \qquad (\text{odnosno } f(a-0) \geqslant f(a) \geqslant f(a+0)),$$

zavisno od toga da li je funkcija f rastuća ili opadajuća, i bar u jednoj od te dve nejednakosti važi stroga nejednakost. Neka je, određenosti radi, f rastuća funkcija i, na primer, $f(a-0) < f(a)$. Tada se u intervalu $(f(a-0), f(a))$ može izabrati racionalan broj (zbog poznate osobine da je skup racionalnih brojeva svuda gust na realnoj pravoj — v. posledicu 2.4.2). Ako taj postupak ponovimo za svaku tačku prekida a funkcije f, dobićemo da je svakoj takvoj tački korespondiran po jedan racionalan broj i svi ti racionalni brojevi su očigledno međusobno različiti, tj.

opisana korespondencija je injektivna. To dokazuje da tačaka prekida ne može biti više nego racionalnih brojeva (v. stav 2.8.5), dakle ne više nego prebrojivo mnogo. ■

U slučaju da je funkcija f definisana i monotona na nekom segmentu realne prave, može se lako dopuniti prethodno tvrđenje i dati jednostavan dovoljan uslov za njenu neprekidnost.

STAV 5.5.2

Neka je $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ monotona funkcija i neka za svaku tačku γ koja je između vrednosti $f(a)$ i $f(b)$ postoji vrednost $c \in [a,b]$, takva da je $f(c) = \gamma$ (drugim rečima, neka je slika $f([a,b])$ segmenta $[a,b]$ funkcijom f takođe neki segment). Tada je funkcija f neprekidna na $[a,b]$.

Dokaz.

Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da je funkcija f sa opisanim svojstvima prekidna u nekoj tački $d \in [a,b]$. Kao i u dokazu prethodnog stava, pretpostavimo da je f rastuća i da je, na primer, $f(d-0) < f(d)$. Ako izaberemo proizvoljno γ iz intervala $(f(d-0), f(d))$, dobićemo, s jedne strane, da je γ tačka između $f(a)$ i $f(b)$, a, s druge strane, da γ očigledno ne može biti slika nijedne vrednosti $c \in [a,b]$. Ova kontradikcija dokazuje tvrđenje stava. ■

Primetimo da dokazani stav govori o tome da za monotone funkcije važi obrat Koši-Bolcanove teoreme 3.1 o međuvrednosti. Kombinujući ta dva tvrđenja, dobijamo, dakle, sledeći neophodan i dovoljan uslov neprekidnosti monotone funkcije.

TEOREMA 5.5.1

Neka je $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ monotona funkcija. Ona je neprekidna na $[a,b]$ ako i samo je slika tog segmenta segment sa krajevima $f(a)$ i $f(b)$. ■

Predimo sada na ispitivanje uslova pod kojima realna funkcija realne promenljive ima inverznu funkciju i uslova pod kojima je ta inverzna funkcija neprekidna. Očigledno je da egzistencija inverzne funkcije za datu realnu funkciju ima veze sa njenom strogom monotonošću. Naime, važi

STAV 5.5.3

Ako je $f: A \to B \subset \mathbf{R}$ strogo monotona na skupu $A \subset \mathbf{R}$ i $B = f(A)$, tada postoji inverzna funkcija $f^{-1}: B \to A$ i ona je takođe strogo monotona (rastuća ako je f rastuća i opadajuća ako je f opadajuća).

Dokaz.

Preslikavanje $f: A \to B$ je surjektivno, pa ostaje samo da se dokaže njegova injektivnost. Neka je, na primer, f strogo rastuća. Tada iz $x_1, x_2 \in A$ sledi da je $f(x_1) < f(x_2)$, te različitim elementima domena A odgovaraju različite slike. Na taj način, funkcija $f: A \to B$ je bijekcija, pa ima inverznu funkciju $f^{-1}: B \to A$.

Neka su y_1, y_2 proizvoljni elementi skupa $B = f(A)$, $y_1 < y_2$ i x_1, x_2 elementi domena A funkcije f za koje je $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Iz $x_1 \geqslant x_2$ bi sledilo $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$, suprotno pretpostavci. Time je dokazano da je $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$, pa je funkcija f^{-1} takođe strogo rastuća. ■

Na taj način, da bi neka realna funkcija imala inverznu, dovoljno je da ona bude strogo monotona (podrazumeva se pri tom da je na odgovarajući način izabran njen

kodomen, tj. domen inverzne funkcije). Za neprekidne funkcije definisane na nekom segmentu taj uslov je i neophodan.

STAV 5.5.4

Neka je $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna i injektivna funkcija. Tada je f strogo monotona na $[a,b]$.

Dokaz.

Pretpostavimo da funkcija sa datim osobinama nije strogo monotona. Tada postoje tri tačke x_1, x_2, x_3 segmenta $[a,b]$, takve da je $x_1 < x_2 < x_3$, ali $f(x_2)$ nije između $f(x_1)$ i $f(x_3)$. Neka je, na primer, $f(x_1)$ između $f(x_2)$ i $f(x_3)$. Kako je f neprekidna na $[x_2, x_3]$, po teoremi 3.1 o međuvrednosti, postoji tačka $c \in [x_2, x_3]$, takva da je $f(c) = f(x_1)$. Tako smo našli dve vrednosti x_1 i c iz segmenta $[a,b]$ za koje je $x_1 < c$ i $f(x_1) = f(c)$, što je kontradikcija sa pretpostavljenom injektivnošću funkcije f. ■

Najzad, dokažimo teoremu koja daje dovoljne uslove pod kojima je inverzna funkcija neprekidna.

TEOREMA 5.5.2

Neka je $f: [a,b] \to B \subset \mathbf{R}$ neprekidna i strogo monotona funkcija i $B = f([a,b])$. Tada je B segment u $\mathbf{R}$ sa krajevima $f(a)$ i $f(b)$, definisana je funkcija $f^{-1}: B \to \mathbf{R}$ koja je neprekidna na B i takođe strogo monotona (rastuća ako je f rastuća i opadajuća ako je f opadajuća).

Dokaz.

Dokažimo neprekidnost funkcije f^{-1} na B — ostala tvrđenja sadržana u ovoj teoremi ranije su dokazana (teorema 1, stav 3). Kako je f^{-1} strogo monotona, B je segment i $f^{-1}(B) = [a,b]$ je takođe segment, to neprekidnost funkcije f^{-1} na B sledi takođe iz teoreme 1. ■

PRIMERI 5.5.1

1° Funkcija $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, data sa $f(x) = \sin x$, neprekidna je (primer 1.1) i strogo monotona. Zato je njena inverzna funkcija $f^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, data sa $f^{-1}(x) = \arcsin x$ (v. definiciju 4.4.1), takođe strogo monotona i neprekidna.

2° Na sličan način se dokazuje neprekidnost funkcije arccos na $[-1,1]$.

3° Funkcija $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, data sa $f(x) = \operatorname{tg} x$, neprekidna je i strogo monotona. Njena inverzna funkcija $\operatorname{arctg}: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je zato definisana i strogo monotona (stav 3). Da bismo dokazali njenu neprekidnost u proizvoljnoj tački $y_0 \in \mathbf{R}$, uočimo tačku $x_0 = \operatorname{arctg} y_0$ i izaberimo dovoljno mali pozitivan broj δ tako da je $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Označimo sa ε_1 i ε_2 brojeve $\varepsilon_1 := \operatorname{tg}(x_0 - \delta)$, $\varepsilon_2 = \operatorname{tg}(x_0 + \delta)$. Tada funkcija f preslikava segment $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ na segment $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ (koji sadrži tačku y_0), strogo je rastuća i neprekidna, pa je i inverzna funkcija $f^{-1} = \operatorname{arctg}$ neprekidna na $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, dakle i u tački y_0.

4° Na sličan način se dokazuje neprekidnost funkcije arcctg na $\mathbf{R}$. ▲

5.6. NEPREKIDNOST ELEMENTARNIH FUNKCIJA

DEFINICIJA 5.6.1

Osnovne elementarne funkcije realne promenljive su konstante i identička funkcija, eksponencijalne i logaritamske funkcije, stepene funkcije, trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije.

DEFINICIJA 5.6.2

Elementarne funkcije realne promenljive su one funkcije koje čine najmanju klasu $\mathcal{E}$ funkcija sa svojstvima:

1° ako je f osnovna elementarna funkcija, onda $f \in \mathcal{E}$;

2° ako $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$, onda i $f_1 \pm f_2 \in \mathcal{E}$, $f_1 f_2 \in \mathcal{E}$ i $\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{E}$ (s tim da su te funkcije definisane na zajedničkom delu domena funkcija f_1 i f_2 i da se za funkciju $\frac{f_1}{f_2}$ isključuju tačke za koje je $f_2 = 0$);

3° ako $f_1: A \to B$, $f_2: B \to C$ i $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$, onda i $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{E}$.

Drugim rečima, elementarne funkcije su one koje se iz osnovnih elementarnih funkcija dobijaju *konačnom* primenom algebarskih operacija $+, -, \cdot, :$ i operacije slaganja preslikavanja. Na primer, elementarna je funkcija data sa

$$f(x) = \sqrt{e^{-\frac{1}{2}\ln[\operatorname{arctg}(1+x^2)]}},$$

dok Dirihleova funkcija χ to nije (zašto?).

TEOREMA 5.6.1

Sve elementarne funkcije su neprekidne.

Dokaz.

Za osnovne elementarne funkcije neprekidnost je dokazana u primerima 1.1, 2.1 i 5.1. Teorema zato sledi iz stavova 2.2 i 2.3. ■

ZADACI

1. Ispitati neprekidnost i karakter tačaka prekida sledećih funkcija:

1° $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ za $x \neq 0$, $f(0) = 1$; 2° $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}}$ za $x \neq 1$, $f(1) = 1$; 3° $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$; 4° $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$; 5° (*Rimanova* funkcija*) $\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{za } x = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q},\ (m,n) = 1, \\ 0, & \text{za } x \notin \mathbf{Q} \text{ ili } x = 0. \end{cases}$ (Uputstvo: Dokazati da $\mathcal{R}$ ima prekid prve vrste u svakoj racionalnoj tački $x_0 \neq 0$, a da je neprekidna u $x_0 = 0$ i u svakoj tački $x_0 \notin \mathbf{Q}$.) 6° $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{za } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{za } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$ (Uputstvo: Dokazati da je f neprekidna samo u celobrojnim tačkama.)

* B. Riemann (1826–1866), nemački matematičar

2. Ako su $f, g: A \to \mathrm{R}$ neprekidne funkcije, dokazati da su i $\min\{f,g\}$ i $\max\{f,g\}$ neprekidne na A.

3. Neka je $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ neprekidna i ograničena funkcija. Dokazati da postoji tačka $x \in \mathrm{R}$ za koju je $f(x) = x^3$.

4. Neka je $f: [a, +\infty) \to \mathrm{R}$ neprekidna i postoji konačan $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Dokazati:

1° f je ograničena na $[a, +\infty)$; 2° f je ravnomerno neprekidna na $[a, +\infty)$.

5. Za funkciju $f: A \to \mathrm{R}$ se kaže da zadovoljava *Lipšicov* uslov* na A ako postoji konstanta $L > 0$, takva da važi $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$ za svake dve tačke $x_1, x_2 \in A$. Dokazati da je takva funkcija ravnomerno neprekidna na A.

6. Ispitati ravnomernu neprekidnost sledećih funkcija:

1° $f(x) = x + \sin x$ na R; 2° $f(x) = \sin x^2$ na R.

7. Ne koristeći Kantorovu teoremu dokazati da su ravnomerno neprekidne funkcije:

$$1^\circ\ f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0, \\ 0, & \text{za } x = 0, \end{cases} \text{ na } [0,\pi]; \quad 2^\circ\ f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ na } [0,1].$$

8. Neka je (a,b) konačan interval i $f: (a,b) \to \mathrm{R}$ neprekidna funkcija. Dokazati da se f može neprekidno produžiti na $[a,b]$ ako i samo ako je f ravnomerno neprekidna na (a,b).

9. Ako je funkcija $f: A \to \mathrm{R}$ neograničena u proizvoljnoj okolini fiksirane tačke $x_0 \in A$, tada ona nije ravnomerno neprekidna na A. Dokazati.

10. Konstruisati monotonu funkciju sa prebrojivo mnogo tačaka prekida.

11. Neka je $0 < \varepsilon < 1$ i $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, data sa $f(x) = x - \varepsilon \sin x$. Dokazati:

1° funkcija f je strogo rastuća i neprekidna na R;

2° jednačina $y = f(x)$ za svako $y \in \mathrm{R}$ ima jedinstveno rešenje $x \in \mathrm{R}$.

(Ta jednačina naziva se *Keplerovom** jednačinom* i ima primene u teorijskoj astronomiji.)

12. 1° Dokazati da svaka neprekidna funkcija $f: [0,1] \to [0,1]$ ima nepokretnu tačku, tj. da postoji $x \in [0,1]$, takvo da je $f(x) = x$.

2° Pokazati da neprekidna funkcija $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ne mora imati nepokretnu tačku; slično važi za neprekidnu funkciju $f: (0,1) \to (0,1)$.

13. Neka je $f: [0,1] \to [0,1]$ neprekidna funkcija koja zadovoljava uslove $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i $f^n(x) = (f \circ f \circ \ldots \circ f)(x) = x$ za neko $n \in \mathrm{N}$ i sve $x \in [0,1]$. Dokazati da je $f(x) = x$ za sve $x \in [0,1]$.

14. Neka su $f, g: [0,1] \to [0,1]$ neprekidne funkcije i važi $f \circ g = g \circ f$. Dokazati da postoji $x \in [0,1]$, takvo da je $f(x) = g(x)$.

* R. O. S. Lipschitz (1832–1903), nemački matematičar

** J. Kepler (1571–1630), nemački astronom

6. DIFERENCIJALNI RAČUN

U ovoj i naredne dve glave obradićemo klasičan diferencijalni i integralni račun funkcija jedne promenljive. Sve funkcije sa kojima ćemo raditi biće realne funkcije realne promenljive, pa to, po pravilu, nećemo posebno isticati.

6.1. IZVOD. GEOMETRIJSKA I MEHANIČKA INTERPRETACIJA

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana u intervalu (a,b). Uočimo proizvoljnu tačku x tog intervala i označimo sa Δx priraštaj argumenta funkcije $f(x)$, tj. takav realan broj, da se tačka $x + \Delta x$ takođe nalazi u intervalu (a,b). Broj $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ćemo nazivati *priraštajem funkcije* $f(x)$ u tački x koji odgovara priraštaju argumenta Δx.

DEFINICIJA 6.1.1

Izvodom funkcije $y = f(x)$ u tački x intervala (a,b) naziva se konačan limes količnika $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ kad Δx teži nuli, ako taj limes postoji.

Izvod se obično označava sa $f'(x)$ ili y':

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Često se priraštaj argumenta označava sa $\Delta x = h$, pa se piše

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1'}$$

Primetimo da izvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ zavisi od tačke x. Prema tome, izvod funkcije $f(x)$, definisane u intervalu (a,b), (ako postoji) jeste funkcija argumenta x u intervalu (a,b).

PRIMERI 6.1.1

Prema datoj definiciji nađimo izvode nekoliko funkcija.

1° Za funkciju $y = f(x) = c$, gde je c konstanta, imamo $\Delta y = 0$, pa je $(c)' = 0$.

2° Uočimo li stepenu funkciju x^n, za prirodan broj n, imaćemo

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \cdots + \binom{n}{n}h^n - x^n\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

3° Izvod eksponencijalne funkcije e^x je (v. primer 4.6.2)

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

4° Za trigonometrijske funkcije sin i cos imamo

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} = \cos x;$$
$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin(x+\frac{h}{2})}{h} = -\sin x.$$

5° Posmatrajmo funkciju $f(x) = |x|$. Za $x > 0$ (i pri tome birajmo h tako da bude $x + h > 0$) imamo

$$|x|' = \lim_{h\to 0}\frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = 1;$$

za $x < 0$ (h birajmo tako da bude $x + h < 0$) je

$$|x|' = \lim_{h\to 0}\frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1.$$

U tački $x = 0$ izvod funkcije $f(x) = |x|$ ne postoji, jer je

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{h\to -0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

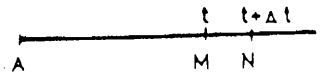
Dakle, funkcija $|x|$ ima svugde izvod sem u tački $x = 0$. ▲

Pojam izvoda u matematici pojavio se kao rezultat rešavanja takvih problema kao što su određivanje brzine materijalne tačke koja se kreće neravnomerno i povlačenje tangente u proizvoljnoj tački neke krive linije. Posmatraćemo sada ukratko ova dva problema.

Brzina tačke

Neka se tačka kreće po pravoj tako da je jednačinom $s = f(t)$ data zavisnost pređenog puta od početne tačke A, sl. 1. U trenutku t neka se tačka nalazi u položaju M, a u trenutku $t + \Delta t$ u položaju N. Pređeni put do trenutka t je $f(t)$, a do trenutka $t + \Delta t$ je $f(t + \Delta t)$. Srednja brzina v_{sr} na putu MN je jednaka

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

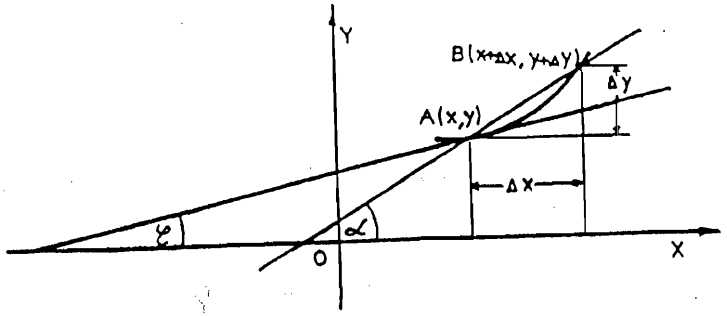


Sl. 6.1.1

Prirodno je definisati trenutnu brzinu te tačke u M kao graničnu vrednost srednje brzine kad N teži M. Drugim rečima, brzina $v(t)$ u M se definiše kao

$$(2)\quad v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t),$$

ako taj limes postoji.



Sl. 6.1.2

Tangenta krive

Posmatrajmo grafik neprekidne funkcije $y = f(x)$ u intervalu (a, b), sl. 2. Prava AB, gde su A i B tačke grafika, naziva se *sečicom* te krive, određenom tačkama A i B. Pustimo sada da se tačka B kreće po krivoj i teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tome menja položaj (u opštem slučaju). Ukoliko postoji određen granični položaj te sečice kad tačka B teži tački A, tada se prava koja zauzima taj granični položaj naziva *tangentom* krive $y = f(x)$ u tački A.

Tangenta u tački A je određena uglom φ koji ona zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose (on se meri u pozitivnom smeru). Pretpostavimo da je $\varphi \neq \pi/2$. Označimo

koordinate tačke A sa (x, y), a tačke B sa $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Pri tom je $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Koeficijent pravca $\operatorname{tg}\alpha$ sečice AB je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa je koeficijent pravca $\operatorname{tg}\varphi$ tangente krive u tački A dat izrazom

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

PRIMERI 6.1.2

1° Kretanje pri slobodnom padu tela dato je jednačinom $s = \frac{1}{2}gt^2$. Nađimo brzinu tela u trenutku t_0:

$$s'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}g(t_0 + h)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2}{h} = \frac{g}{2} \lim_{h \to 0}(2t_0 + h) = gt_0.$$

2° Uočimo tačku $A(1, 1)$ na krivoj $y = x^3$. Koeficijent pravca tangente u tački A je $y'(1) = 3$, jer je $y' = 3x^2$. Jednačina tangente je

$$y - 1 = 3(x - 1),$$

odnosno $3x - y - 2 = 0$. ▲

Diferencijabilnost

Uočimo proizvoljnu realnu funkciju $y = f(x)$, definisanu u intervalu (a, b). Neka je $x \in (a, b)$ fiksirana tačka. Jasno je da priraštaj $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ $(x + \Delta x \in (a, b))$ zavisi od priraštaja nezavisno promenljive Δx.

DEFINICIJA 6.1.2

Za funkciju $y = f(x)$ se kaže da je *diferencijabilna* u tački x ako se Δy može napisati u obliku

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{4}$$

gde je A realan broj, a funkcija $\alpha(\Delta x)$ je beskonačno mala kad $\Delta x \to 0$.

Primetimo da se (4) može napisati u obliku

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{4'}$$

STAV 6.1.1

Funkcija f je diferencijabilna u tački x ako i samo ako ima izvod $f'(x)$ u toj tački.

Dokaz.

Neka je $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$, $A \in \mathbf{R}$. Odatle sledi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$, odnosno $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$.

Obrnuto, ako postoji $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, onda je, prema stavu 4.2.3,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x),$$

gde $\alpha(\Delta x) \to 0$ za $\Delta x \to 0$. Iz poslednje jednakosti imamo

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad \blacksquare$$

STAV 6.1.2

Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x, onda je ona i neprekidna u toj tački.

Dokaz.

Iz diferencijabilnosti funkcije f u tački x sledi

$$\lim_{\Delta x \to 0}[f(x + \Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[f'(x)\Delta x + o(\Delta x)] = 0,$$

odnosno

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x). \quad \blacksquare$$

Primetimo da neprekidna funkcija u tački x ne mora u toj tački biti diferencijabilna. Na primer, funkcija $|x|$ nije diferencijabilna u tački $x = 0$, iako je u toj tački neprekidna (primer 1.5°). Navedimo još jedan primer.

PRIMER 6.1.3

Funkcija $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, data sa

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{za } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{za } x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

prekidna je u svakoj tački, osim u tački $x = 0$ (proveriti!). Dakle, f nije diferencijabilna ni u jednoj tački $x \neq 0$. Ispitajmo njenu diferencijabilnost za $x = 0$.

Ako je h racionalno, imamo

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 - 0}{h} = h \to 0 \quad \text{za} \quad h \to 0.$$

Za h iracionalno je

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{0 - 0}{h} = 0 \to 0, \quad h \to 0.$$

Dakle,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0,$$

pa je f diferencijabilna u tački $x = 0$ i $f'(0) = 0$. ▲

Primetimo da izvod funkcije f u datoj tački a možemo pisati i u obliku

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

6.2. PRAVILA DIFERENCIRANJA

Pretpostavimo da funkcije u i v imaju izvode u tački x. Nađimo izvode njihovog zbira, razlike, proizvoda i količnika.

TEOREMA 6.2.1

Ako funkcije u i v imaju izvode $u'(x)$ i $v'(x)$ u tački x, onda i funkcije $u \pm v$, uv, u/v imaju izvode u toj tački (kod količnika u/v pretpostavljamo $v(x) \neq 0$). Pri tom je

1° $(u \pm v)'(x) = u'(x) \pm v'(x)$;

2° $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

3° $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Dokaz.

1° Označimo $y = u \pm v$. Tada je

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \pm v(x+h) - u(x) \mp v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \pm \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right].$$

Kako su funkcije u i v diferencijabilne u tački x, to limesi oba sabirka u zagradi postoje i važi $y'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

2° Neka je $y = uv$. Tada je

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right].$$

Kako su u i v diferencijabilne (a samim tim i neprekidne) funkcije u tački x, to postoje

$$\lim_{h \to 0} v(x+h) = v(x), \quad \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x), \quad \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v'(x),$$

pa je $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

3° Označimo $y = u/v$. Kako je, po pretpostavci, $v(x) \neq 0$, to je, za dovoljno malo h, $v(x+h) \neq 0$. Zato je

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)} \right] = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x)v(x+h)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x)v(x+h)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \left[\frac{v(x)(u(x+h) - u(x))}{h} - \frac{u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \right].$$

Kako su funkcije u i v diferencijabilne u tački x, to je

$$y'(x) = \frac{1}{v^2(x)} \left[v(x) \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \lim_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right]$$
$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad \blacksquare$$

Jednakosti gornje teoreme kratko pišemo u obliku

$$(1) \qquad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

POSLEDICA 6.2.1

Ako je funkcija u diferencijabilna u tački x, onda je i funkcija cu, gde je c konstanta, diferencijabilna u tački x i važi $(cu)'(x) = cu'(x)$. $\blacksquare$

PRIMERI 6.2.1

1° Neka je $f(x) = \operatorname{tg} x$. Tada je

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2° Ako je $f(x) = \operatorname{ctg} x$, onda je

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad \blacktriangle$$

Izvod kompozicije funkcija

TEOREMA 6.2.2

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna u tački x_0 i funkcija $z = g(y)$ diferencijabilna u tački $y_0 = f(x_0)$. Tada je funkcija $z = (g \circ f)(x)$ diferencijabilna u tački x_0 i pri tom važi

$$(2) \qquad (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0).$$

Dokaz.

Napišimo priraštaj Δz funkcije $z = g(y)$ u tački y_0 u obliku

$$\Delta z = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y,$$

gde $\alpha(\Delta y) \to 0$ $(\Delta y \to 0)$. Funkciju α, koja je bila definisana za $\Delta y \neq 0$, dodefinišimo pomoću $\alpha(0) = 0$; prethodna relacija tada ostaje na snazi. Podelimo tu relaciju sa Δx i dobijamo

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ako $\Delta x \to 0$, onda će (zbog neprekidnosti funkcije y) $\Delta y \to 0$ i $\alpha(\Delta y) \to 0$, pa prelaskom na limes dobijamo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)f'(x_0). \quad \blacksquare$$

PRIMERI 6.2.2

1° Da bismo našli izvod funkcije a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$, napišimo je u obliku $a^x = e^{x \ln a}$ ili

$$z = a^x = e^y, \quad y = x \ln a.$$

Prema teoremi 2 je

$$z' = (e^y)'(x \ln a)' = e^y \ln a,$$

tj. $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbf{R}$.

2° Nadimo izvod funkcije

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0, \\ 0, & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

Za $x \neq 0$, prema (2), je $y'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, a u tački $x = 0$ je

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Dakle,

$$y'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0, \\ 0, & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

Primetimo da funkcija $y'(x)$ ima prekid druge vrste u tački 0, jer $\lim_{x \to 0} y'(x)$ ne postoji.

3° Neka je $u = (f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)(x)$. Označimo $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(y_1)$, $\ldots$, $y_n = f_n(y_{n-1})$; tada je

$$u'(x) = f_n'(y_{n-1})f_{n-1}'(y_{n-2}) \cdots f_1'(x).$$

Dokažimo ovo tvrđenje indukcijom. Za $n = 1$ ono je očigledno. Pretpostavimo da ono važi za neko n. Tada je

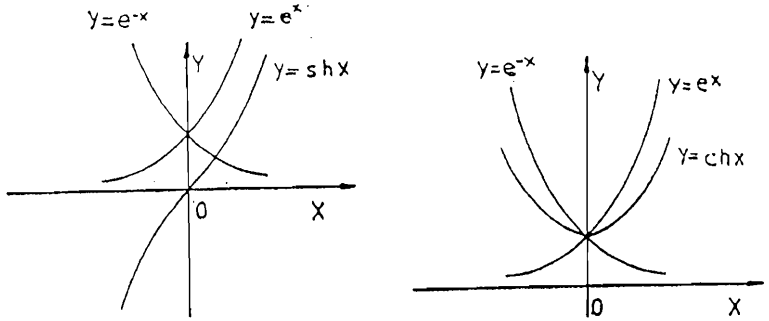
$$\begin{aligned}(f_{n+1} \circ f_n \circ \cdots \circ f_1)'(x) &= ((f_{n+1}(f_n \circ \cdots \circ f_1))(x))' \\ &= f_{n+1}'(y_n)(f_n \circ \cdots \circ f_1)'(x) = f_{n+1}'(y_n)f_n'(y_{n-1}) \cdots f_1'(x).\end{aligned}$$

Hiperboličke funkcije

4° Definišimo funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

koje se nazivaju *hiperboličkim sinusom*, odnosno *hiperboličkim kosinusom*. Grafici ovih funkcija lako se mogu dobiti pomoću grafika funkcija $y = e^x$ i $y = e^{-x}$, sl. 1.



Sl. 6.2.1

Neka svojstva hiperboličkih funkcija mogu se lako uočiti:

(a) sh je neparna, a ch je parna funkcija.

(b) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ za sve $x \in \mathbf{R}$.

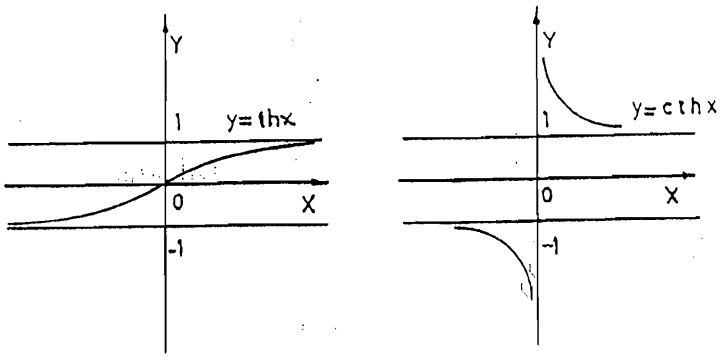
Slično funkcijama tg i ctg definišu se funkcije

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad (x \in \mathbf{R}) \quad \text{i} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}),$$

koje se nazivaju *hiperboličkim tangensom*, odnosno *hiperboličkim kotangensom* (grafici su prikazani na sl. 2).

Uočimo dva identiteta koja slede iz (b):

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{\operatorname{cth}^2 x - 1} \quad (x \neq 0).$$



Sl. 6.2.2

Izvode hiperboličkih funkcija dobijamo korišćenjem teorema 1 i 2:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad \blacktriangle$$

Izvod inverzne funkcije

Teorema 6.2.3

Neka je $y = f(x)$ neprekidna strogo monotona funkcija u nekoj okolini tačke x_0 i neka je $x = \varphi(y)$ njena inverzna funkcija. Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x_0 i $f'(x_0) \neq 0$, onda je i funkcija $\varphi(y)$ diferencijabilna u tački $y_0 = f(x_0)$. Pri tom važi

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{3}$$

Dokaz.

Napišimo količnik $[\varphi(y) - \varphi(y_0)]/(y - y_0)$ u obliku

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Imajući u vidu strogu monotonost i neprekidnost funkcije $f(x)$, kao i činjenicu da $x \to x_0$ ako i samo ako $y \to y_0$, prelaskom na limes imamo

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \blacksquare$$

Primeri 6.2.3

1° Nađimo izvod funkcije $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ u proizvoljnoj tački $x > 0$. Prema teoremi 3 je

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

jer je $x = a^y$ inverzna funkcija funkcije $y = \log_a x$. Specijalno, za $a = e$ dobijamo

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Takođe, za funkciju $y = \ln|x|$, koja je definisana svugde osim za $x = 0$, imamo

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} (\ln x)', & \text{za } x > 0, \\ (\ln(-x))', & \text{za } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{za } x > 0, \\ \dfrac{1}{-x}(-1), & \text{za } x < 0, \end{cases}$$

tj. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ za $x \neq 0$.

2° Pokažimo da za funkciju $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x > 0$, važi formula $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Napišimo $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, pa će prema teoremi 2 i prethodnom primeru biti $y' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Prepuštamo čitaocu da proveri da formula $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ostaje na snazi i za $x \leqslant 0$, za one vrednosti eksponenta α za koje je funkcija x^α tu definisana (v. kraj odeljka 4.3). Izuzetak je tačka $x = 0$ u slučaju $\alpha < 1$, kada izvod nije definisan.

3° Posmatrajmo inverzne trigonometrijske funkcije arcsin: $[-1, 1] \to \mathbf{R}$, arccos: $[-1, 1] \to \mathbf{R}$, arctg: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, arcctg: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Prema teoremi 3 imamo:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = \frac{1}{-1/\sin^2 y} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Napomenimo da funkcije arcsin i arccos u tačkama $x = \pm 1$ nemaju izvod.

4° Nađimo izvode *inverznih hiperboličkih funkcija*.

Iz svojstava funkcija e^x i e^{-x} vidi se da je $\mathrm{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo rastuća i surjektivna funkcija. Prema tome, ona ima inverznu funkciju $\mathrm{arsh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (čita se „*area sinus hiperbolički*" — docnije ćemo videti razlog ovakvog naziva). Izrazimo ovu funkciju pomoću poznatih funkcija.

Iz $y = (e^x - e^{-x})/2$ sledi $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$ (jednakost $e^x = y - \sqrt{1+y^2}$ ne dolazi u obzir, jer je $e^x > 0$). Odavde je $x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$, tj.

$$\mathrm{arsh}\, y = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Funkcija $\mathrm{ch}\colon \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ je strogo monotona na svakom od intervala $(-\infty, 0]$ i $[0, +\infty)$. Njene restrikcije na te intervale označimo sa

$$\mathrm{ch}_- = \mathrm{ch}\,|(-\infty, 0], \quad \mathrm{ch}_+ = \mathrm{ch}\,|[0, +\infty).$$

Inverzne funkcije ovih restrikcija označimo redom sa arch_- i arch_+. One su neprekidne, strogo monotone (prva opadajuća, a druga rastuća), definisane na $[1, \infty)$. Slično kao funkciju arsh, te funkcije možemo izraziti kao

$$\mathrm{arch}_- y = \ln(y - \sqrt{y^2-1}), \quad y \geqslant 1,$$
$$\mathrm{arch}_+ y = \ln(y + \sqrt{y^2-1}), \quad y \geqslant 1,$$

ili, kratko, kao

$$\mathrm{arch}\, y = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1}), \quad y \geqslant 1.$$

Funkcija $y = \mathrm{th}\, x$, kao strogo monotona, ima inverznu funkciju $x = \mathrm{arth}\, y$, $|y| < 1$, koja se može izraziti i u obliku

$$\mathrm{arth}\, y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \quad |y| < 1.$$

Najzad, funkcija $y = \mathrm{cth}\, x$, $x \neq 0$, ima inverznu funkciju $x = \mathrm{arcth}\, y$, $|y| > 1$, koja se izražava i u obliku

$$\mathrm{arcth}\, y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}, \quad |y| > 1.$$

Izvodi pomenutih inverznih hiperboličkih funkcija određuju se primenom teoreme 3 ili direktno, korišćenjem navedenih elementarnih izraza i mogu se naći u tablici na narednoj strani. ▲

Navedimo sada tablicu izvoda osnovnih elementarnih funkcija (kojima ćemo priključiti i hiperboličke i inverzne hiperboličke funkcije). Kako se elementarne funkcije dobijaju iz osnovnih elementarnih funkcija primenom aritmetičkih operacija i operacije kompozicije funkcija, to se pomoću ove tablice i teorema 1 i 2 može dobiti izvod bilo koje elementarne funkcije (u svakoj tački u kojoj on postoji).

	FUNKCIJA $f(x)$	IZVOD $f'(x)$	VAŽI ZA
1.	$c = \mathrm{const}$	0	$x \in \mathbb{R}$
2.	x	1	$x \in \mathbb{R}$
3.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$
			$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, q neparno, $x \neq 0$
			$\alpha = \frac{p}{q} > 1$, q neparno, $x \in \mathbb{R}$
4.	a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
6.	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
7.	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
9.	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
10.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
11.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
12.	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
14.	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$x \in \mathbb{R}$
15.	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\, x$	$x \in \mathbb{R}$
16.	$\mathrm{th}\, x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$x \in \mathbb{R}$
17.	$\mathrm{cth}\, x$	$-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
18.	$\mathrm{arsh}\, x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$x \in \mathbb{R}$
19.	$\mathrm{arch}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$	$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$
20.	$\mathrm{arth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
21.	$\mathrm{arcth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert > 1$

6.3. LOGARITAMSKI IZVOD. LEVI I DESNI IZVOD. BESKONAČAN IZVOD

Logaritamski izvod

Neka je $y = f(x)$ pozitivna i diferencijabilna funkcija. Tada postoji $u = \ln y = \ln f(x)$. Izvod te funkcije je

$$u'(x) = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{1}$$

Poslednji izraz naziva se *logaritamskim izvodom* funkcije $y = f(x)$ u tački x. On je pogodan za nalaženje izvoda nekih funkcija.

PRIMER 6.3.1

Neka su $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne funkcije i $f(x) > 0$. Za funkciju $y = (f(x))^{g(x)}$ važi $\ln y = g(x) \ln f(x)$, pa koristeći (1) dobijamo

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)},$$

odnosno

$$y' = (f(x))^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right]. \quad \blacktriangle$$

Levi i desni izvod

DEFINICIJA 6.3.1

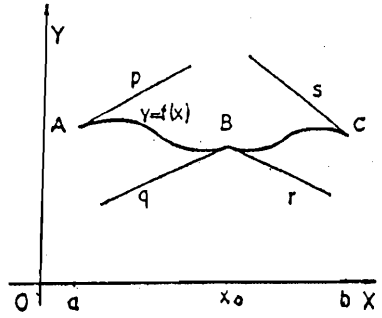
Neka je funkcija f definisana u intervalu $(x - \varepsilon, x]$ (odnosno $[x, x + \varepsilon)$) za neko $\varepsilon > 0$. Ako postoji

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_-(x) \quad \left(\text{odnosno } \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_+(x) \right),$$

on se zove *levi* (odnosno *desni*) *izvod* funkcije f u tački x.

Uzevši u obzir svojstva limesa, vidimo da ako je $f'_-(x) = f'_+(x)$, onda funkcija f u tački x ima izvod i pri tom je $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$. U primeru 1.1.5° se vidi da funkcija $f(x) = |x|$ u tački $x = 0$ ima levi izvod $f'_-(0) = -1$ i desni izvod $f'_+(0) = 1$, dok $f'(0)$ ne postoji. Dakle, ako su u tački x levi i desni izvod funkcije f različiti, onda u toj tački ona nije diferencijabilna.

Ako funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ima izvod u intervalu (a, b), zatim levi izvod u tački b i desni izvod u tački a, onda



Sl. 6.3.1

se često kaže da f ima izvod na segmentu $[a, b]$.

Geometrijska interpretacija pojma levog i desnog izvoda je lako uočljiva. Neka je grafik funkcije $y = f(x)$, definisane na segmentu $[a, b]$, dat na sl. 1. Levi izvodi $f'_-(b)$ i $f'_-(x_0)$ predstavljaju koeficijente pravaca polupravih s, odnosno q. Ove poluprave nazvaćemo *levim polutangentama* u tačkama C, odnosno B. Desni izvodi $f'_+(a)$ i $f'_+(x_0)$ predstavljaju koeficijente pravaca *desnih polutangenata* p, odnosno r, u tačkama A, odnosno B.

Beskonačan izvod

Do sada smo govorili o izvodu kao o konačnom realnom broju. Medutim, uzimajući u obzir geometrijsku interpretaciju izvoda kao koeficijenta pravca tangente i (geometrijski očiglednu) činjenicu da tangenta može biti vertikalna, možemo definiciju izvoda proširiti.

DEFINICIJA 6.3.2

Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x. Kaže se da ona u tački x ima *beskonačan izvod* ako je ispunjena jedna od sledeće dve jednakosti:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = +\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\infty.$$

PRIMERI 6.3.2

1° Izvod funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u tački $x = 0$ je beskonačan. Naime,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty.$$

2° Funkcija $y = \sqrt{x}$ definisana je za $x \geqslant 0$. U tački $x = 0$ imamo

$$\lim_{h \to +0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty,$$

pa data funkcija ima u tački $x = 0$ beskonačan desni izvod.

3° Funkcija $f(x) = x^{2/3}$ je definisana i neprekidna za svako $x \in \mathbf{R}$. U tački $x = 0$ je

$$\lim_{h \to \pm 0} \frac{h^{2/3} - 0^{2/3}}{h} = \lim_{h \to \pm 0} \frac{1}{h^{1/3}} = \pm\infty.$$

Dakle, ova funkcija u nuli nema izvoda (ni beskonačnog), ali su joj levi i desni izvod beskonačni:

$$f'_-(0) = -\infty, \quad f'_+(0) = +\infty. \quad \blacktriangle$$

6.4. DIFERENCIJAL FUNKCIJE

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna u tački x. Prema stavu 1.1 imamo jednakost

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0). \tag{1}$$

Zaključujemo da u određenom smislu priraštaj Δy možemo aproksimirati izrazom $f'(x)\Delta x$ kad $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

Dakle je $f'(x)\Delta x$ glavni (i to linearni) deo priraštaja Δy funkcije $y = f(x)$ u tački x kad $\Delta x \to 0$.

Izraz $f(x)\Delta x$ (preciznije, funkcija $\Delta x \mapsto f'(x)\Delta x$) se naziva *diferencijalom* funkcije $f(x)$ u tački x i označava

$$dy(\Delta x) = f'(x)\Delta x \quad \text{ili} \quad df(x)(\Delta x) = f'(x)\Delta x \quad \text{ili kraće} \quad df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Ako stavimo $f(x) = x$, onda je $df(x) = 1 \cdot \Delta x$ ili $d(x) = \Delta x$, te se priraštaj nezavisno promenljive Δx poklapa sa diferencijalom nezavisno promenljive dx. Zato se često piše

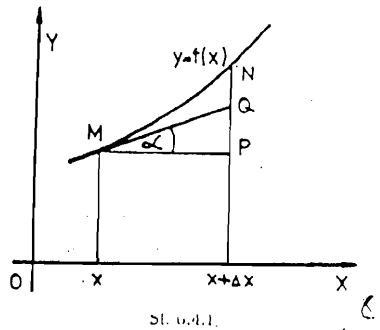
$$dy = f'(x)\,dx. \tag{2}$$

Iz jednakosti (2) imamo

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \text{ili} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Dakle, izvod je jednak količniku diferencijala funkcije i diferencijala nezavisno promenljive.

Geometrijska interpretacija diferencijala lako se vidi na sl. 1. Tačke M i N grafika funkcije $y = f(x)$ imaju koordinate $(x, f(x))$, odnosno $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. Priraštaj Δy je jednak dužini odsečka PN. Kako je $PQ = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x$ i $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$, to je $PQ = f'(x)\Delta x$. Dakle je diferencijal dy jednak dužini odsečka PQ.



Sl. 6.4.1.

Invarijantnost forme diferencijala

Posmatrajmo kompoziciju $y = (f \circ g)(t)$ funkcija $x = g(t)$, $y = f(x)$, pri čemu je funkcija g diferencijabilna u tački t, a f diferencijabilna u tački $g(t)$. Na osnovu teoreme 2.2, za funkciju $y = (f \circ g)(t)$ imamo $dy = (f \circ g)'(t)\,dt = f'(x)g'(t)\,dt$. S druge strane, iz $x = g(t)$ sledi $dx = g'(t)\,dt$, pa je $dy = f'(x)\,dx$.

Dakle, diferencijal funkcije $f(x)$ ima isti oblik, bez obzira da li je x nezavisno promenljiva ili zavisi od druge nezavisno promenljive. Ovo svojstvo označava se kao *invarijantnost forme diferencijala*.

Pravila izračunavanja diferencijala

STAV 6.4.1
Ako su funkcije $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne u tački x, onda važi:
1° $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$;
2° $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$;
3° $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}$, $v(x) \neq 0$.

Dokaz.
Dokažimo samo jednakost 2°; ostale se dokazuju slično. Prema definiciji diferencijala i pravilu za izvod proizvoda imamo

$$\begin{aligned} d(u(x)v(x)) &= (u(x)v(x))'\,dx = (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,dx \\ &= v(x)u'(x)\,dx + u(x)v'(x)\,dx = v(x)du(x) + u(x)dv(x). \end{aligned}$$ ■

Primene diferencijala

Videli smo da važi približna jednakost $\Delta y \approx dy$ $(\Delta x \to 0)$. Na osnovu nje dobijamo

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0). \tag{3}$$

PRIMERI 6.4.1
1° Izračunajmo približno $\sin 31°$. Prema (3) za funkciju $f(x) = \sin x$ imamo

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x \quad (\Delta x \to 0).$$

Stavimo ovde $x = \pi/6$, $\Delta x = \pi/180$, pa dobijamo

$$\sin 31° \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0{,}5151.$$

2° Pokažimo da važe približne jednakosti
(a) $\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x$ $(\Delta x \to 0)$;
(b) $\sqrt{a^2 + \Delta x} \approx a + \dfrac{\Delta x}{2a^2}$ $(\Delta x \to 0)$, $a > 0$.

Za jednakost (a) uzmimo funkciju $\ln(1 + x)$ i primenimo jednakost (3) u tački $x = 0$. Za jednakost (b) uzmimo funkciju $a\sqrt{1 + (x/a^2)}$ i primenimo jednakost (3) u tački x:

$$a\sqrt{1 + \frac{x + \Delta x}{a^2}} \approx a\sqrt{1 + \frac{x}{a^2}} + \frac{\Delta x}{2a^2\sqrt{1 + (x/a^2)}} \quad (\Delta x \to 0),$$

što za $x = 0$ daje tvrđenje (b). ▲

Primetimo da je osnovni nedostatak ovakvih približnih formula nemogućnost da se proceni greška približnih izračunavanja koja se na njima baziraju.

Diferencijalni količnik dy/dx možemo koristiti za nalaženje izvoda funkcija koje su date u parametarskom obliku (v. odeljak 4.1). Naime, neka jednakosti $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definišu u nekoj okolini tačke $t = \varphi^{-1}(x)$ funkciju $y = \psi(\varphi^{-1}(t))$ (setimo se da pretpostavljamo da je funkcija $\varphi(t)$ bijektivna). Neka su, dalje, funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ diferencijabilne u tački t i $\varphi'(t) \neq 0$. Tada, zbog invarijantnosti forme diferencijala, imamo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4}$$

PRIMER 6.4.2

Nađimo izvod funkcije date jednačinama $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ (v. zadatak 4.24). Na osnovu (4) je

$$y' = \frac{r\sin t}{r(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}). \quad \blacktriangle$$

6.5. VIŠI IZVODI I DIFERENCIJALI

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijabilna u intervalu (a, b). Njen izvod $f'(x)$ je funkcija nezavisno promenljive x, definisana u tom intervalu. Ako je ta funkcija diferencijabilna u nekoj tački $x \in (a, b)$, onda ćemo njen izvod $(f'(x))'$ nazvati *drugim izvodom* funkcije $f(x)$ u tački x i označavati ga sa $y'' = f''(x)$ ili $y^{(2)} = f^{(2)}(x)$. Dakle,

$$(f'(x))' = f''(x).$$

Slično se definišu $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ itd. Pretpostavimo da je definisan n-ti izvod $f^{(n)}(x)$ funkcije $f(x)$ za neko $n \in \mathbf{N}$. Tada se njen $(n+1)$-vi izvod definiše kao izvod funkcije $f^{(n)}(x)$, tj.

$$(f^{(n)}(x))' = f^{(n+1)}(x)$$

i označava još sa $y^{(n+1)}$. Ako se govori i o drugom, trećem itd. izvodu (*viši izvodi*) funkcije $y = f(x)$, onda se izvod $y' = f'(x)$ naziva *prvim izvodom*. Za n-ti izvod kaže se da je izvod n-tog reda. Ako funkcija ima izvod n-tog reda, kaže se da je n puta diferencijabilna.

PRIMERI 6.5.1

1° Nađimo drugi izvod funkcije e^{-x^2}. Imamo:

$$(e^{-x^2})' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2},$$
$$(e^{-x^2})'' = (-2xe^{-x^2})' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

2° Izračunajmo n-ti izvod funkcije $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$). Diferencirajući sukcesivno, dobijamo

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \dots.$$

Metodom matematičke indukcije dokazuje se da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

3° Za funkciju a^x ($a > 0$) imamo

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n.$$

Specijalno, $(e^x)^{(n)} = e^x$.

4° Primetimo da je

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

pa se lako proveravaju formule

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

5° Za funkciju $y = \ln(1+x)$ lako dobijamo

$$y' = \frac{1}{1+x},\ y'' = \frac{-1}{(1+x)^2},\ y''' = \frac{2}{(1+x)^3},\ \dots,$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

6° Posmatrajmo polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

Izrazimo koeficijente a_k pomoću vrednosti izvoda polinoma $P_n(x)$ u tački $x = a$. U tom cilju uočimo jednakosti

$$P_n(a) = a_0,\ P_n'(a) = a_1,\ P_n''(a) = 1\cdot 2a_2,\ \dots,\ P_n^{(n)}(a) = n!\,a_n.$$

Iz njih sledi

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

gde je $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$. Stavljajući dobijene vrednosti u dati polinom, dobija se

$$P_n(x) = P_n(a) + P_n'(a)(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad \blacktriangle$$

Lajbnicova formula

Slično formuli $(uv)' = u'v + uv'$ postoji formula za izračunavanje izvoda n-tog reda funkcije $y = uv$.

STAV 6.5.1

Ako su u i v n puta diferencijabilne funkcije, onda važi sledeća Lajbnicova formula*

$$(1)\qquad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$$
$$= \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \cdots + \binom{n}{n} u v^{(n)}.$$

Dokaz.

Dokažimo formulu (1) matematičkom indukcijom.

Za $n = 1$ je $(uv)' = u'v + uv'$.

Pretpostavimo da formula (1) važi za neko $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$(uv)^{(n+1)} = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}\right]'$$
$$= u^{(n+1)} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] u^{(n)} v' + \cdots + \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] u^{(n+1-k)} v^{(k)}$$
$$+ \cdots + v^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(n+1-k)} v^{(k)},$$

jer je $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. ■

PRIMERI 6.5.2

1° Za funkciju $y = x^2 e^x$, prema formuli (1), imamo za $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$y^{(n)} = e^x x^2 + n e^x \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2} e^x \cdot 2 = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)).$$

2° Nađimo $f^{(n)}(0)$ ako je $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Iz $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sledi

$$f'(x)(1 + x^2) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Prema formuli (1), za $n \geqslant 1$ je

$$(1 + x^2) f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = 0,$$

odakle sledi

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1) f^{(n-1)}(0).$$

* G. W. Leibniz (1646–1716), nemački matematičar i filozof

Kako je $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, dobijamo

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k (2k)!, & \text{za } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Diferencijali višeg reda

Posmatrajmo funkciju $y = f(x)$, koja je diferencijabilna u intervalu (a, b). Diferencijal $dy = f'(x)\,dx$ zavisi od $x \in (a, b)$ i dx.

Pretpostavimo da x tretiramo kao nezavisno promenljivu, a dx da je konstanta. Ako je $f'(x)$ diferencijabilna funkcija, onda ćemo diferencijal funkcije $f'(x)\,dx$ nazvati drugim diferencijalom funkcije $y = f(x)$ i označavati sa d^2y. Uzimajući u obzir da je $(dx)' = 0$ imaćemo

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)\,dx)'\,dx = f''(x)(dx)^2,$$

što ćemo zapisati kao

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Induktivno se definišu diferencijali višeg reda. Pretpostavimo da je funkcija $f^{(n-1)}(x)$ diferencijabilna; diferencijal funkcije $d^{n-1}y = f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}$ nazvaćemo *diferencijalom n-tog reda* funkcije $y = f(x)$. Prema definiciji je

$$(2)\qquad d^n y = d(d^{n-1}y) = d\left(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}\right) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Odavde sledi

$$(3)\qquad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Ako promenljiva x zavisi od neke druge promenljive t, onda diferencijal funkcije $dy = f'(x)\,dx$ ima oblik (pri tom pretpostavljamo da su $f(x)$ i $x(t)$ dvaput diferencijabilne)

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx),$$

tj.

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Primetimo da drugi diferencijal ne poseduje svojstvo invarijantnosti forme. Slično važi i za više diferencijale.

Viši izvodi funkcija u parametarskom obliku

Neka je funkcija $y = f(x)$ definisana jednačinama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, gde su $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ dvaput diferencijabilne funkcije u nekoj okolini tačke t, pri čemu je $\varphi'(t) \neq 0$. Videli smo da je $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Prema definiciji y'' imamo

$$y'' = (y')' = \left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Slično se nalaze i y''', $y^{(4)}$, $\ldots$.

PRIMER 6.5.3

U primeru 4.2 smo videli da za funkciju datu parametarski pomoću $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ važi $y' = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$ $(t \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$. Prema gornjem je

$$y''(x) = \left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)' \frac{1}{r(1-\cos t)} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2r\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4r\sin^4\frac{t}{2}}. \quad \blacktriangle$$

6.6. OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

DEFINICIJA 6.6.1

Kaže se da realna funkcija f, definisana u nekoj okolini tačke $c \in \mathbb{R}$, ima u toj tački *lokalni maksimum (minimum)* ako postoji okolina U tačke c tako da je za svako $x \in U$ ispunjeno

$$f(x) \leqslant f(c) \qquad (f(x) \geqslant f(c)).$$

U tački c je *strogi lokalni maksimum (minimum)* ako je

$$f(x) < f(c) \qquad (f(x) > f(c)) \qquad \text{za } x \in U \setminus \{c\}.$$

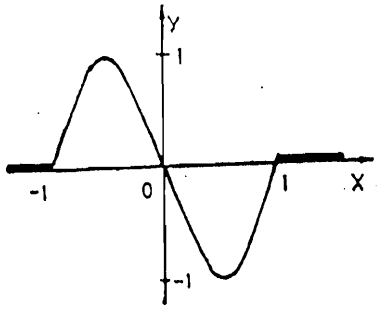
(Strogi) maksimumi i minimumi zajedno se nazivaju *(strogim) ekstremumima*.

PRIMER 6.6.1

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -x - x^2, & \text{za } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2 - x, & \text{za } 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{za } |x| > 1, \end{cases}$$

ima strogi lokalni maksimum u tački $x = -1/2$, strogi lokalni minimum u tački $x = 1/2$. Lokalni minimum je u tački $x = -1$, a lokalni maksimum u tački $x = 1$. U tačkama $x = \alpha$, $|\alpha| > 1$, su lokalni maksimumi i lokalni minimumi. ▲



Sl. 6.6.1

Napomenimo da je našom definicijom lokalnog ekstremuma obuhvaćen samo „unutrašnji" lokalni ekstremum, jer je pretpostavljeno da funkcija mora biti definisana „i levo i desno" od tačke c. Naravno, naziv „lokalni ekstremum" bi mogle da imaju i tačke kakva je, na primer, tačka $x = 0$ za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ — tu je vrednost funkcije manja čak od svih ostalih vrednosti te funkcije, ali je f definisana samo „desno" od tačke $x = 0$. Neki od zaključaka koji slede ne važe za takve tačke, pa ćemo se mi držati definicije 1.

Fermaov* stav

STAV 6.6.1

Ako je funkcija f diferencijabilna u tački c i u toj tački ima lokalni ekstremum, onda je $f'(c) = 0$.

Dokaz.

Kako je u tački c lokalni ekstremum funkcije f, to postoji okolina U te tačke, takva da je $f(c+h) - f(c)$ ili nenegativno ili nepozitivno za sve $c + h \in U$. Iz diferencijabilnosti funkcije f u tački c sledi

$$f(c+h) - f(c) = f'(c)h + \alpha(h)h,$$

gde $\alpha(h) \to 0$ $(h \to 0)$. Pretpostavimo da je $f'(c) \neq 0$. Ako poslednju jednakost napišemo u obliku

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) + \alpha(h), \quad h \neq 0,$$

vidi se da za dovoljno malo $|h|$ desna strana ima stalan znak, dok leva može biti i nenegativna i nepozitivna. Kontradikcija. ■

Rolova** teorema

TEOREMA 6.6.1

Neka je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a,b]$, diferencijabilna u intervalu (a,b) i $f(a) = f(b)$. Tada u intervalu (a,b) postoji tačka c, takva da je $f'(c) = 0$.

Dokaz.

Ako je funkcija f konstantna na $[a,b]$, onda je $f'(x) = 0$ za $x \in (a,b)$, pa je teorema dokazana.

Pretpostavimo da postoji $x \in (a,b)$ tako da je $f(x) > f(a) = f(b)$. Funkcija f je neprekidna na segmentu, pa prema teoremi 5.3.2 dostiže svoj maksimum u nekoj tački c koja, u ovom slučaju, pripada intervalu (a,b). Po prethodnom stavu je $f'(c) = 0$.

Slično se dokazuje egzistencija tačke c sa $f'(c) = 0$ ako postoji tačka $x \in (a,b)$, takva da je $f(x) < f(a)$. ■

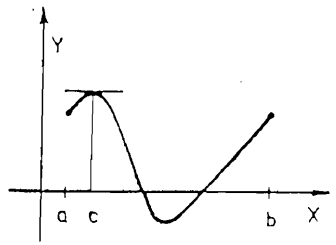
Geometrijska interpretacija Rolove teoreme je jednostavna: ako je kriva $y = f(x)$ neprekidna na $[a,b]$ i u svakoj tački ima tangentu, a pri tom je $f(a) = f(b)$, onda postoji bar jedna tačka $x \in (a,b)$ u kojoj je tangenta horizontalna, sl. 2.

* P. Fermat (1601–1665), francuski matematičar

** M. Rolle (1652–1719), francuski matematičar

Navedimo i jednostavnu mehaničku interpretaciju. Neka se tačka kreće po pravoj i neka se u trenutku t nalazi u tački s koordinatom $x = x(t)$. Neka je funkcija $x(t)$ neprekidna za $t \in [\alpha, \beta]$ i diferencijabilna za $t \in (\alpha, \beta)$. Ako je $x(\alpha) = x(\beta)$, tj. ako se položaji tačke u trenucima $t = \alpha$ i $t = \beta$ poklapaju, onda mora postojati trenutak $\gamma \in (\alpha, \beta)$ u kojem je brzina tačke jednaka nuli.

Primetimo da Rolova teorema daje dovoljne uslove za egzistenciju tačke u kojoj je izvod funkcije jednak nuli. Takve tačke nazvaćemo *stacionarnim*.



Sl. 6.6.2

Lagranžova* teorema

TEOREMA 6.6.2

Ako je funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i diferencijabilna u intervalu (a, b), onda postoji $c \in (a, b)$, tako da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{1}$$

Dokaz.

Posmatrajmo funkciju $\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$, datu sa $\varphi(x) = f(x) + \lambda x$ i odredimo $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da φ zadovoljava uslove Rolove teoreme. Jasno je da je φ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna u (a, b). Da bi bilo $\varphi(a) = \varphi(b)$ mora biti $\lambda = -\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Tada postoji tačka $c \in (a, b)$, takva da je

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) + \lambda,$$

odnosno

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \blacksquare$$

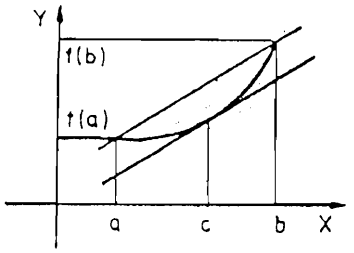
Navedimo mehaničku interpretaciju Lagranžove teoreme. Ako se tačka kreće po pravoj po zakonu $x = x(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, pri čemu je $x(t)$ neprekidna na $[\alpha, \beta]$ i diferencijabilna u (α, β), onda je srednja brzina za vremenski interval $[\alpha, \beta]$ jednaka $\dfrac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Za neko $t_0 \in (\alpha, \beta)$ je trenutna brzina u tački t_0 jednaka srednjoj brzini u pomenutom vremenskom intervalu, jer je $\dfrac{x(\beta) - x(\alpha)}{\beta - \alpha} = x'(t_0)$.

Geometrijski, Lagranžova teorema znači da, ako je kriva $y = f(x)$ neprekidna za $x \in [a, b]$ i u svakoj tački intervala (a, b) ima tangentu, onda postoji tačka $c \in (a, b)$, takva da je tangenta u tački $(c, f(c))$ paralelna sečici kroz tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, sl. 3.

* J. L. Lagrange (1736–1813), francuski matematičar

Napomenimo da se jednakost (1) nekad piše u drugačijem obliku. Naime, stavimo $a = x$, $b = x + h$. Tada je $b - a = h$, a c se može napisati kao $c = x + \theta h$, $0 < \theta < 1$. Tada jednakost (1) ima oblik

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$



Sl. 6.6.3

Inače, Lagranžovu teoremu zovemo još i *teoremom o srednjoj vrednosti* diferencijalnog računa.

PRIMERI 6.6.2

Dokažimo nejednakosti

1° $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

2° $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

3° $\dfrac{x - y}{x} < \ln \dfrac{x}{y} < \dfrac{x - y}{y}$, $0 < y < x$.

Neka je, na primer, i u slučajevima 1° i 2° $y < x$. Korišćenjem Lagranžove teoreme na segmentu $[y, x]$ imamo:

1° $\sin x - \sin y = (x - y)\cos c$, $x < c < y$, odakle je

$$|\sin x - \sin y| = |x - y| \cdot |\cos c| \leqslant |x - y|;$$

2° $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \dfrac{x - y}{1 + c^2}$, $x < c < y$, odakle se dobija

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y|;$$

3° $\ln x - \ln y = (x - y)\dfrac{1}{c}$, $0 < y < c < x$. Odavde je, s jedne strane,

$$\ln x - \ln y < (x - y)\frac{1}{y},$$

a, s druge strane,

$$\ln x - \ln y > (x - y)\frac{1}{x},$$

što daje datu dvostruku nejednakost. ▲

Posledice Lagranžove teoreme

STAV 6.6.2

Ako je funkcija $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u intervalu (a, b) i pri tom je $f'(x) = 0$, $x \in (a, b)$, onda je f konstantna u (a, b).

Dokaz.

Neka je $x_1 \in (a, b)$ neka fiksirana tačka i x proizvoljna tačka iz (a, b). Funkcija f zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na segmentu $[x_1, x]$ (ili na segmentu $[x, x_1]$). Dakle, postoji tačka c, između x_1 i x, za koju važi

$$f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1).$$

Kako je $f'(c) = 0$, to je $f(x) = f(x_1)$. $\blacksquare$

POSLEDICA 6.6.1

Ako funkcije f i g imaju jednake izvode: $f'(x) = g'(x)$, $x \in (a,b)$, onda se one razlikuju za konstantu. ■

STAV 6.6.3

Ako je funkcija $f:(a,b) \to \mathrm{R}$ diferencijabilna u (a,b) i $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) za $x \in (a,b)$, onda ona raste (opada) na (a,b). Ako je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za $x \in (a,b)$, onda funkcija f strogo raste (opada) na (a,b).

Dokaz.

Neka su $x_1, x_2 \in (a,b)$ i $x_1 < x_2$. Iz jednakosti (1) sledi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Kako je $f'(c) \geqslant 0$ ($f'(c) \leqslant 0$), to je $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$). Slično važi u drugom slučaju. ■

Primetimo da ovaj stav daje dovoljne uslove za strogo rašćenje (opadanje) koji nisu i neophodni.

PRIMER 6.6.3

Funkcija $f(x) = x^3$, $-1 < x < 1$, strogo raste, iako je $f'(0) = 0$. ▲

Prekidi izvoda

STAV 6.6.4

Neka funkcija $f(x)$ ima konačan izvod u intervalu (a,b) i neka je neprekidna na $[a,b]$. Ako postoji $\lim_{x \to a+0} f'(x)$ ($\lim_{x \to b-0} f'(x)$), onda postoji i $f'_+(a)$ ($f'_-(b)$) i važi jednakost

$$\lim_{x \to a+0} f'(x) = f'_+(a) \qquad (\lim_{x \to b-0} f'(x) = f'_-(b)).$$

Dokaz.

Da bismo dobili $f'_+(a) = \lim_{h \to +0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, primenimo Lagranžovu teoremu na funkciju $f(x)$, $x \in [a, a+h]$. Dobijamo

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Kako postoji granična vrednost od $f'(a+\theta h)$ kad $h \to 0$, to je

$$f'_+(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to +0} f'(a + \theta h) = \lim_{x \to a+0} f'(x). \quad ■$$

POSLEDICA 6.6.2

Ako funkcija $f(x)$ ima konačan izvod u intervalu (a,b), onda $f'(x)$ ne može imati prekide prve vrste u tom intervalu.

Dokaz.

Neka je $c \in (a,b)$ proizvoljna tačka. Ako oba limesa $\lim_{x \to c-0} f'(x)$ i $\lim_{x \to c+0} f'(x)$ postoje, prema prethodnom stavu mora biti

$$\lim_{x \to c-0} f'(x) = \lim_{x \to c+0} f'(x) = f'(c). \quad ■$$

Darbuova* teorema

TEOREMA 6.6.3

Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna na segmentu $[a,b]$, onda za proizvoljno μ između $f'(a)$ i $f'(b)$ postoji $c \in (a,b)$ tako da je $f'(c) = \mu$.

Dokaz.

Pretpostavimo da je, određenosti radi, $f'(a) < \mu < f'(b)$. Definišimo funkcije

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x \qquad \text{i} \qquad \psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}, & \text{za } x \neq a, \\ \varphi'(a), & \text{za } x = a. \end{cases}$$

Funkcija $\varphi(x)$ je diferencijabilna na $[a,b]$, pa je $\psi(x)$ neprekidna na $[a,b]$. Kako je $\varphi'(a) = f'(a) - \mu < 0$, to postoji $\delta > 0$, takvo da je $\psi(x) < 0$ za $a < x < a + \delta$. Odavde sledi $\varphi(x) < \varphi(a)$ za $a < x < a + \delta$. Dakle, u tački $a \in [a,b]$ funkcija $\varphi(x)$ ne dostiže minimum.

Slično se pokazuje da funkcija $\varphi(x)$ ne dostiže minimum ni u tački b.

Kako je funkcija $\varphi(x)$ neprekidna na $[a,b]$, to ona dostiže minimum u nekoj tački $c \in (a,b)$. Prema Fermaovom stavu 1 je $\varphi'(c) = 0$, odakle je $f'(c) = \mu$. ■

Naglasimo da pod navedenim pretpostavkama izvod $f'(x)$ ne mora biti neprekidan na $[a,b]$, te se zaključak teoreme ne može izvesti na osnovu Koši-Bolcanove teoreme o međuvrednosti.

Košijeva teorema

TEOREMA 6.6.4

Ako su funkcije $f, g:[a,b] \to \mathrm{R}$ neprekidne na $[a,b]$, diferencijabilne u (a,b) i $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a,b)$, onda postoji tačka $c \in (a,b)$, tako da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

Dokaz.

Primetimo najpre da je $g(a) \neq g(b)$, jer bi u protivnom iz Rolove teoreme sledilo da je $g'(x) = 0$ za neko $x \in (a,b)$, suprotno pretpostavci. Definišimo neprekidnu na $[a,b]$ i diferencijabilnu u (a,b) funkciju $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$ i odredimo λ tako da bude $\varphi(a) = \varphi(b)$. Lako nalazimo

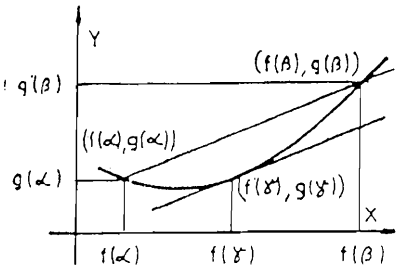
$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

* G. Darboux (1842–1917), francuski matematičar

Kako funkcija φ tada zadovoljava uslove Rolove teoreme, to postoji $c \in (a,b)$, takvo da je $\varphi'(c) = f'(c) + \lambda g'(c) = 0$. Odavde sledi

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0. \quad \blacksquare$$

Geometrijsku interpretaciju Košijeve teoreme možemo dobiti posmatrajući funkcije u parametarskom obliku. Neka jednačine $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, definišu funkciju $y = F(x)$ i neka krive $x = f(t)$, $y = g(t)$ imaju tangente u svakoj tački $t \in (\alpha,\beta)$, pri čemu je $g'(t) \neq 0$, $\alpha < t < \beta$. Tada postoji tačka $\gamma \in (\alpha,\beta)$, takva da je tangenta krive $y = F(x)$ u tački $x = f(\gamma)$ paralelna sečici te krive koja prolazi kroz tačke $(f(\alpha), g(\alpha))$, $(f(\beta), g(\beta))$, sl. 4.



Sl. 6.6.4

Primetimo da je Lagranžova teorema specijalan slučaj Košijeve. Naime, stavljajući u Košijevoj teoremi $g(x) = x$, dobija se Lagranžova.

Lopitalova* pravila

Posmatrajmo funkcije f i g koje su neprekidne na poluotvorenom intervalu $[a,b)$ i zadovoljavaju uslove $f(a) = g(a) = 0$, $g(x) \neq 0$ za $x \in (a,b)$. Funkcija f/g je neprekidna u (a,b). Međutim, ponašanje ove funkcije u okolini tačke a zavisi od $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Slično, ukoliko posmatramo funkcije f i g, neprekidne u nekoj okolini U tačke a, pri čemu je $f(a) = g(a) = 0$ i $g(x) \neq 0$ za $x \in U \setminus \{a\}$, za ponašanje funkcije f/g je od značaja $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Za određivanje ovih limesa često se pokazuju korisnim sledeća Lopitalova pravila.

Teorema 6.6.5

Neka su funkcije f i g neprekidne u poluotvorenom intervalu $[a,b)$, diferencijabilne u (a,b) i pri tom je $g'(x) \neq 0$ i neka je $f(a) = g(a) = 0$. Ako postoji (konačan ili beskonačan) $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4}$$

Dokaz.

Označimo $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = p$. Pretpostavimo najpre da je p konačan broj. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Izaberimo $x_0 \in (a,b)$ tako da važi

$$a < x < x_0 \implies \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - p \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

* G. F. A. de l'Hospital (1661–1704), francuski matematičar

Primena Košijeve teoreme na segmentu $[a,x]$ daje jednakost

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

za neko $c \in (a,x)$. Odavde sledi

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - p \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - p \right| < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = p.$$

Pretpostavimo sada da je $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ beskonačan. Dokaz je sličan navedenom, s tim što se umesto (5) stavlja

$$a < x < x_0 \implies \frac{f'(x)}{g'(x)} > \varepsilon \quad \left(\text{ili} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} < -\varepsilon \right). \quad \blacksquare$$

Teorema 5 važi i u slučaju kada $x \to \pm\infty$. Navešćemo bez dokaza tvrđenje u jednom slučaju.

Teorema 6.6.6

Neka su funkcije f i g diferencijabilne u intervalu (a,∞) i pri tom $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a,\infty)$ i neka je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Ako postoji $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji i $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4'}$$

$\blacksquare$

Teorema 6.6.7

Neka su f i g diferencijabilne funkcije u intervalu (a,b) i pri tom $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a,b)$ i neka je $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$. Ako postoji $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost (4).

Dokaz.

Neka je $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = p \in \mathbf{R}$ i $\varepsilon > 0$ je proizvoljno. Izaberimo tačke x i x_1 tako da bude $a < x < x_1 < b$. Primenimo teoremu 4 na segmentu $[x,x_1]$. Postoji $c \in (x,x_1)$ tako da je

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ili

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}. \tag{6}$$

Kako je $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = p$, to se može izabrati x_1 tako da je $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - p\right| < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$. Iz $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$ sledi da se može naći pozitivno $\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2|p|}\right\}$, tako da je

$$\left|\frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}\right| < 1 + \delta, \quad \text{za } a < x < a + \delta \text{ i } x < x_1.$$

Na osnovu ovih nejednakosti iz (6) dobijamo

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - p\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} - p\right| < \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}(1+\delta) - p\right|$$

$$\leqslant (1+\delta)\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - p\right| + \delta|p| \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} + |p|\frac{\varepsilon}{2|p|} = \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = p.$$

Dokaz teoreme u slučaju da je $p = \infty$ ili $p = -\infty$ izostavljamo. ■

Navedimo bez dokaza i sledeću teoremu.

TEOREMA 6.6.8

Neka su f i g diferencijabilne funkcije u intervalu (a, ∞) i pri tom je $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a, \infty)$ i neka je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Ako postoji $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost (4'). ■

Primetimo da Lopitalova pravila daju dovoljne, ali ne i neophodne uslove za postojanje limesa.

PRIMERI 6.6.4

1° Formalnom primenom Lopitalovog pravila na $\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ dobija se $\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ koji ne postoji. No, dati limes se može napisati u obliku

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

2° Za izračunavanje limesa $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ primenom Lopitalovog pravila dobijamo $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$. Primenom Lopitalovog pravila na ovaj limes imamo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$. Primenimo još jednom Lopitalovo pravilo: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$. Dakle je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

3° U cilju izračunavanja $\lim_{x\to+0} x \ln x$, napišimo ovaj limes u obliku $\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x}$ i primenimo Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to+0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0.$$

4° Izračunajmo $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

Dati limes napišimo u obliku $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)}$, te primenimo Lopitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{xe^x + 2e^x} = \frac{1}{2}.$$

5° Za izračunavanje limesa $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$ naći ćemo najpre

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-1} = -1,$$

pa je

$$\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} = e^{-1}. \quad ▲$$

6.7. TEJLOROVA FORMULA

Do sada smo se u nekoliko navrata bavili aproksimacijom funkcija. Tako smo, na primer, imali približne jednakosti

$$\sin(a + x) \approx \sin a + x \cos a, \quad \ln(1 + x) \approx x, \quad \sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a^2}.$$

U ovim primerima funkcija kojom aproksimiramo je linearna funkcija koja datu funkciju aproksimira u okolini tačke $x = 0$. Primetimo da je u svim navedenim slučajevima izvod u tački 0 funkcije koju aproksimiramo jednak izvodu u tački 0 funkcije kojom aproksimiramo.

Pokušajmo sada da datu funkciju f, definisanu u nekoj okolini tačke a, aproksimiramo polinomom stepena n.

Pretpostavimo da funkcija $f(x)$ ima u tački $x = a$ sve izvode do stepena n zaključno. Setimo se da smo polinom $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ mogli da napišemo u obliku $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Imajući ovo u vidu, aproksimirajmo funkciju $f(x)$ polinomom n-tog stepena

$$P_n(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Lako je proveriti da važe jednakosti

(1)
$$f(a) = P_n(a,a),\ f'(a) = P_n'(a,a),\ f''(a) = P_n''(a,a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a,a).$$

Polinom $P_n(x,a)$ se naziva *Tejlorovim* polinomom* funkcije $f(x)$.

Da bi se polinom $P_n(x,a)$ mogao koristiti umesto funkcije $f(x)$, potrebno je znati procenu izraza

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x,a), \tag{2}$$

koji nazivamo *ostatkom*. Procenom ostatka procenjujemo grešku koju činimo pri aproksimaciji $f(x) \approx P_n(x,a)$.

Teorema 6.7.1

Neka funkcija $f(x)$, neprekidna sa svim svojim izvodima do n-tog reda zaključno u nekoj okolini U tačke a, ima izvod $(n+1)$-og reda u toj okolini. Ako je $x \in U$ i $p \in \mathbf{N}$, onda važi formula

(3)
$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

(4)
$$R_n(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{p\cdot n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

za neko ξ koje je između a i x.

Dokaz.

Određenosti radi, neka je $x > a$. Uvedimo pomoćnu funkciju

$$\varphi(t) = f(x) - P_n(x,t) - (x-t)^p Q(x), \qquad a < t < x, \tag{5}$$

gde je

$$Q(x) = \frac{R_n(x)}{(x-a)^p}. \tag{6}$$

* B. Taylor (1685–1731), engleski matematičar

Funkcija $\varphi(t)$ zadovoljava uslove Rolove teoreme na segmentu $[a,x]$. Naime,

1° $\varphi(t)$ je neprekidna na $[a,x]$,

2° $\varphi(t)$ je diferencijabilna u (a,x),

3° $\varphi(a) = 0 = \varphi(x)$.

Tvrdenja 1° i 2° su očevidna. Za tvrdenje 3° primetimo da je

$$\varphi(a) = f(x) - P_n(x,a) - R_n(x) = 0,$$
$$\varphi(x) = f(x) - P_n(x,x) = 0.$$

Dakle, postoji $\xi \in (a,x)$, tako da je $\varphi'(\xi) = 0$. Prema (3), (5) i (6) je

$$\varphi'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \cdots + n\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x),$$

odnosno

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x).$$

Stavljajući u poslednju jednakost $\varphi'(\xi) = 0$ dobija se

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{p\cdot n!} f^{(n+1)}(\xi),$$

te iz (6) sledi

$$R_n(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{p\cdot n!} f^{(n+1)}(\xi). \quad \blacksquare$$

Oblik (4) ostatka je Šlemilh-Rošov*. Stavljajući $p = n+1$ i $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$, dobija se *Lagranžov oblik ostatka*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)). \tag{7}$$

Ako stavimo $p = 1$, $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$, dobijamo *Košijev oblik ostatka*

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)). \tag{8}$$

Navedimo još *Peanov** oblik ostatka.*

*O. Schlömilch (1823–1901), nemački matematičar, E. Roche (1820–1883), francuski matematičar

**G. Peano (1858–1932), italijanski matematičar

STAV 6.7.1

Neka funkcija $f(x)$ ima sve izvode do $(n-1)$-og reda zaključno u nekoj okolini tačke a i neka postoji $f^{(n)}(a)$. Tada ostatak (2) ima oblik

$$R_n(x) = o((x-a)^n), \qquad x \to a. \tag{9}$$

Dokaz.

Prema (2) je

$$R_n(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Na osnovu (1) je

$$R_n(a) = 0,\ R_n'(a) = 0,\ R_n''(a) = 0,\ \ldots,\ R_n^{(n)}(a) = 0. \tag{10}$$

Napišimo (9) u obliku

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

i dokažimo ovu jednakost indukcijom.

Za $n = 1$, prema (10), važi

$$\lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{R_1(x) - R_1(a)}{x-a} = R_1'(a) = 0.$$

Pretpostavimo da tvrđenje (9) važi. Prema (10) je

$$R_{n+1}(a) = R_{n+1}'(a) = R_{n+1}''(a) = \cdots = R_{n+1}^{(n)}(a) = R_{n+1}^{(n+1)}(a) = 0.$$

Uzevši u obzir poslednjih $n+1$ jednakosti i pretpostavku indukcije, dobijamo jednakost

$$R_{n+1}'(x) = o((x-a)^n), \qquad x \to a.$$

Lagranžova teorema, primenjena na funkciju $R_{n+1}(x)$ na segmentu $[a, x]$, daje

$$R_{n+1}(x) - R_{n+1}(a) = R_{n+1}'(\xi)(x-a), \qquad a < \xi < x.$$

Kako je $|\xi - a| < |x-a|$ i $R_{n+1}(a) = 0$, to je

$$R_{n+1}(x) = R_{n+1}'(\xi)(x-a) = o((x-a)^n)(x-a) = o((x-a)^{n+1}), \quad x \to a. \quad \blacksquare$$

Maklorenova formula

Ako u formuli (3) stavimo $a = 0$, dobićemo *Maklorenovu* formulu*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{11}$$

* C. Maclaurin (1698–1746), engleski matematičar

gde je

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1 \qquad \text{(Lagranžov oblik ostatka)}$$

i

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1 \qquad \text{(Košijev oblik ostatka).}$$

PRIMERI 6.7.1.

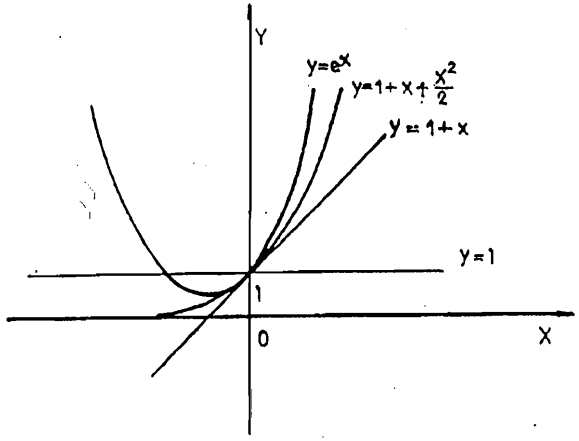
1° Za funkciju e^x je $(e^x)^{(n)} = e^x$, pa formula (11) ima oblik

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

a ostatak u Lagranžovom obliku je

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Polinomi $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1+x$, $P_2(x) = 1+x+\frac{1}{2}x^2$ koji aproksimiraju funkciju e^x grafički su prikazani na slici 1.



Sl. 6.7.1

2° Maklorenova formula za funkcije $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, sa ostacima u Lagranžovom (za prve dve), odnosno Košijevom (za poslednje dve) obliku, glasi

(u svim relacijama je $0 < \theta < 1$):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n+1}.$$

3° Izračunajmo e približno stavljajući $x = 1$ u primeru 1°. Tada se dobija

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Greška koja se pri tom čini procenjuje se pomoću nejednakosti

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}e^\theta \leqslant \frac{3}{(n+1)!},$$

gde je za e uzet broj 3 za gornju granicu i prilikom majoriranja stavljeno $\theta = 1$.

4° Dokažimo da je broj e iracionalan (v. i zadatak 3.17).

Pretpostavimo da je e racionalan broj oblika $e = m/n$, $n \geqslant 2$. Prema primeru 3° imamo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

odakle je

$$n!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right) = R_n \cdot n!.$$

Dakle je $n!\,R_n$ prirodan broj.

S druge strane, iz jednakosti $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!}e^\theta$ se dobija, stavljajući $\theta = 0$, odnosno $\theta = 1$,

$$\frac{1}{n+1} < n!\,R_n < \frac{3}{n+1},$$

odakle sledi da je $0 < n!\,R_n < 1$. Kontradikcija.

5° Nađimo graničnu vrednost $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

Iskoristimo rezultate primera 2°, napisane u obliku sa Peanovim ostatkom. Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x\ln\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\sin x\ln\cos x + o(x^3))}{x^3}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{2x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle$$

6.8. ISPITIVANJE FUNKCIJA

Rašćenje i opadanje funkcija

Ranije smo videli da diferencijabilne funkcije sa nenegativnim izvodom u nekom intervalu rastu, a sa nepozitivnim izvodom opadaju (stav 6.3). Dopunimo ovo tvrđenje obratnim.

STAV 6.8.1

Ako diferencijabilna funkcija $f(x)$ u intervalu (a,b) raste (opada), onda je $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) za $x \in (a,b)$.

Dokaz.

Pretpostavimo da $f(x)$ raste u intervalu (a,b). Neka je x proizvoljna tačka tog intervala. Tada je

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0 \quad \text{za} \quad x+h \in (a,b).$$

Odavde sledi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0.$$

Slično se pokazuje da je $f'(x) \leqslant 0$ ako $f(x)$ opada. ■

PRIMERI 6.8.1

1° Funkcija $f(x) = x\ln x$ strogo raste u intervalu $(1/e,\infty)$, a strogo opada u intervalu $(0,1/e)$, jer je $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ za $x > 1/e$ i $f'(x) < 0$ za $0 < x < 1/e$.

2° Funkcija $f(x) = (x-1)^3$ raste u intervalu $(0,2)$, jer je $f'(x) = 3(x-1)^2 \geqslant 0$ za $x \in (0,2)$. Primetimo da je $f'(1) = 0$, no $f(x)$ strogo raste u intervalu $(0,2)$. ▲

Lokalne ekstremne vrednosti

U stavu 6.1 videli smo da je anuliranje prvog izvoda diferencijabilne funkcije $f(x)$ u tački c potreban uslov za postojanje lokalne ekstremne vrednosti te funkcije u tački c. Navedimo sada i neke dovoljne uslove.

STAV 6.8.2

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija u nekoj okolini U tačke c i diferencijabilna u $\mathring{U}$. Tada je u tački c lokalni ekstremum funkcije $f(x)$ ako $f'(x)$ menja znak kada x prolazi kroz c. Ako $f'(x)$ ne menja znak kada x prolazi kroz c, onda u tački c funkcija $f(x)$ nema ekstremnu vrednost. Pri tom:

1° *ako je $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (-\infty, c)$ i $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (c, \infty)$, onda je u tački c strogi lokalni minimum;*

2° *ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (-\infty, c)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in U \cap (c, \infty)$, onda je u tački c strogi lokalni maksimum.*

Dokaz.

Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi 1°. Prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti, za $x \in \mathring{U}$ imamo jednakost

$$f(c) - f(x) = f'(\xi)(c - x),$$

gde je ξ izmedu c i x. Bilo da je $x < c$, bilo da je $x > c$, važi $f(c) - f(x) < 0$, tj. u tački $x = c$ funkcija $f(x)$ ima strogi lokalni minimum.

Slično se dokazuje stav i u ostalim slučajevima. ■

PRIMER 6.8.2

Funkcija $f(x) = |3x - 2|$ ima izvod svugde osim za $x = 2/3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & \text{za } x > 2/3, \\ -3, & \text{za } x < 2/3, \end{cases}$$

odakle se vidi da je $f'(x) < 0$ za $x < 2/3$ i $f'(x) > 0$ za $x > 2/3$. Dakle, $f(x)$ ima strogi lokalni minimum u tački $x = 2/3$, $f(2/3) = 0$. Primetimo da u tački $x = 2/3$ funkcija $f(x)$ nema izvod. ▲

STAV 6.8.3

Neka je funkcija f zajedno sa svojim prvim izvodom f' neprekidna u nekoj okolini tačke c i u toj tački postoji f''. Pri tom je $f'(c) = 0$. Ako je $f''(c) < 0$ ($f''(c) > 0$), onda funkcija $f(x)$ u tački c ima strogi lokalni maksimum (minimum).

Dokaz.

Po definiciji je, zbog $f'(c) = 0$,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}.$$

Neka je, na primer, $f''(c) < 0$. Tada je, prema poznatoj osobini limesa, i izraz $\dfrac{f'(x)}{x - c}$ negativan, samo ako je x dovoljno blizu tački c, ali različito od nje. Drugim rečima, u nekoj okolini $\mathring{U}$ tačke c je $\dfrac{f'(x)}{x - c} < 0$. To znači da za $x \in U$ i $x < c$ važi $f'(x) > 0$, a za $x \in U$ i $x > c$ važi $f'(x) < 0$. Prema prethodnom stavu sledi da u tački c funkcija $f(x)$ ima strogi lokalni maksimum. ■

STAV 6.8.4

Neka je funkcija f zajedno sa prvih $n - 1$ izvoda neprekidna u nekoj okolini tačke c i u toj okolini postoji $f^{(n)}(x)$. Neka je pri tom

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

Tada:

1° *ako je n neparan broj, u tački c nema ekstremne vrednosti funkcije f;*

2° *ako je n paran broj, u tački c funkcija f ima lokalni ekstremum. Pri tom, ako je $f^{(n)}(c) > 0$, u tački c je strogi lokalni minimum, a ako je $f^{(n)}(c) < 0$, u tački c je strogi lokalni maksimum.*

Dokaz.

Prema Tejlorovoj formuli za funkciju f imamo

$$f(x) = f(c) + \frac{(x - c)^n}{n!} f^{(n)}(c) + o((x - c)^n), \quad x \to c. \tag{1}$$

Stavimo $o((x-c)^n) = \dfrac{\alpha(x)}{n!}(x-c)^n$, gde $\alpha(x) \to 0$ kad $x \to c$, i napišimo jednakost (1) u obliku

$$f(x) - f(c) = \frac{(x - c)^n}{n!}(f^{(n)}(c) + \alpha(x)).$$

Izaberimo okolinu U tačke c, dovoljno malu tako da

$$x \in U \implies |f^{(n)}(c)| > |\alpha(x)|.$$

Ako je n neparno, tada

$$x \in U,\ x < c \implies \operatorname{sgn}(f(x) - f(c)) = -\operatorname{sgn} f^{(n)}(c),$$
$$x \in U,\ x > c \implies \operatorname{sgn}(f(x) - f(c)) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(c).$$

Ako je n parno, tada

$$x \in \mathring{U},\ f^{(n)}(c) > 0 \implies f(x) - f(c) > 0,$$
$$x \in \mathring{U},\ f^{(n)}(c) < 0 \implies f(x) - f(c) < 0. \quad ■$$

PRIMERI 6.8.3

1° Funkcija $f(x) = x \ln x$ ima u tački $x = 1/e$ lokalni minimum, $f(1/e) = -1/e$. Naime, rešenje jednačine $f'(x) = \ln x + 1 = 0$ je $x = 1/e$, a drugi izvod $f''(x) = 1/x$ u tački $1/e$ je pozitivan, $f''(1/e) = e > 0$.

2° Ispitajmo tačku $x = 0$ za funkciju $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$.

Stavljajući u izrazima

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x,$$
$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x,$$
$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x,$$
$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

$x = 0$, imamo $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 4$. Dakle, u tački $x = 0$ je lokalni minimum funkcije f.

3° Za funkciju $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$ i $f(0) = 0$, lako se vidi da su svi izvodi u tački 0 jednaki nuli, tj. $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbf{N}$. No, $f(x) - f(0) = e^{-1/x^2} > 0$ za $x \neq 0$, te funkcija f ima strogi lokalni minimum u tački $x = 0$.

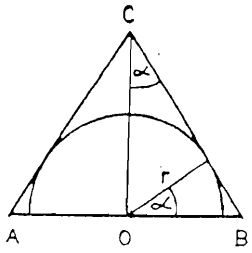
4° Oko date polulopte treba opisati kupu tako da veliki krug polulopte leži na bazi kupe. Koja od takvih kupa ima minimalnu zapreminu?

Nacrtajmo ravan presek kroz osu kupe, sl. 1. Sa r označimo poluprečnik date polulopte, a sa α ugao između osnove kupe i normale povučene iz centra te osnove na izvodnicu koja se nalazi u posmatranom ravnom preseku. Ako sa R, odnosno H, označimo poluprečnik osnove, odnosno visinu kupe, onda je

$$R = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad H = \frac{r}{\sin\alpha},$$

pa je zapremina V kupe data izrazom

$$V = \frac{r^3\pi}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}.$$



Sl. 6.8.1

Ta zapremina će biti minimalna kada funkcija $f(\alpha) = \cos^2\alpha\sin\alpha$ ima maksimalnu vrednost $(0 < \alpha < \pi/2)$. Iz jednačine $f'(\alpha) = \cos^3\alpha(1 - 2\operatorname{tg}^2\alpha) = 0$ dobija se kao rešenje $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}$. Kako $f'(\alpha)$ menja znak od + na − kada promenljiva α prolazi kroz α_0, to je u tački α_0 lokalni maksimum funkcije $f(\alpha)$, pa zapremina V ima minimalnu vrednost za $\alpha = \alpha_0$.

5° Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \alpha x - x^\alpha + \beta, \quad x > 0, \quad 0 \neq \alpha \neq 1, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Kako je $f'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$, to je $f'(x) = 0$ za $x = 1$. Uzimajući u obzir da je $f(1) = \alpha + \beta - 1$, zaključujemo:

(a) Ako je $0 < \alpha < 1$, onda je

$$f'(x) < 0 \quad \text{za} \quad 0 < x < 1, \qquad f'(x) > 0 \quad \text{za} \quad x > 1,$$

pa je $f(x) > 0$ za $x \neq 1$. Dakle, u tački $x = 1$ je strogi minimum (i najmanja vrednost funkcije), pa je

$$\alpha x - x^\alpha + \beta \geqslant 0, \tag{2}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x = 1$.

(b) Ako je $\alpha < 0$ ili $\alpha > 1$, onda je

$$f'(x) > 0 \quad \text{za} \quad 0 < x < 1, \qquad f'(x) < 0 \quad \text{za} \quad x > 1,$$

pa je $f(x) < 0$ za $x \neq 1$. Dakle, u tački $x = 1$ je strogi maksimum (i najveća vrednost funkcije), pa je

$$\alpha x - x^\alpha + \beta \leqslant 0, \tag{3}$$

pri čemu jednakost važi ako i samo ako je $x = 1$.

U (2), odnosno (3), stavimo $x = a/b$ $(a > 0, b > 0)$, $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$ $(1/p + 1/q = 1)$. Tada dobijamo *Jangove* nejednakosti*:

$$a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \qquad (p > 1), \tag{4}$$

$$a^{1/p}b^{1/q} \geqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \qquad (p < 1,\ p \neq 0). \tag{5}$$

Stavimo u tim nejednakostima $a = a_i^p/A$, $b = b_i^q/B$, $i = 1, 2, \ldots, n$, gde su a_i, b_i, A, B pozitivni brojevi. Tada se dobija

$$\frac{a_ib_i}{A^{1/p}B^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q}\cdot\frac{b_i^q}{B} \qquad (p > 1),$$

$$\frac{a_ib_i}{A^{1/p}B^{1/q}} \geqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{a_i^p}{A} + \frac{1}{q}\cdot\frac{b_i^q}{B} \qquad (p < 1,\ p \neq 0).$$

Ako ove nejednakosti za $i = 1, 2, \ldots, n$ saberemo i stavimo $A = \sum_{i=1}^n a_i^p$, $B = \sum_{i=1}^n b_i^q$, dobijamo *Helderove** nejednakosti*:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q} \qquad \left(p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \tag{6}$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q} \qquad \left(p < 1, \quad p \neq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right). \tag{7}$$

Neka je $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Na desnu stranu identičnosti

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)^{p-1}$$

primenimo nejednakost (6). Dobijamo

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

* W. Young (1882–1946), engleski matematičar

** O. Hölder (1859–1937), nemački matematičar

Deljenjem te nejednakosti sa $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/q}$ dobija se *nejednakost Minkovskog**

$$(8)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p} \qquad (p>1).$$

Slično se dobija i nejednakost

$$(9)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p} \qquad (p<1,\quad p\neq 0). \quad \blacktriangle$$

Konveksnost funkcija

DEFINICIJA 6.8.1

Funkcija $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ naziva se *konveksnom* ako za proizvoljne $x_1, x_2 \in (a,b)$ važi

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2),$$

gde je $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\lambda_1\geqslant 0$, $\lambda_2\geqslant 0$.

Ako za $x_1\neq x_2$ i $\lambda_1\lambda_2\neq 0$ umesto $\leqslant$ važi znak $<$, za funkciju f se kaže da je *strogo konveksna*. Ukoliko umesto znaka $\leqslant$ stoji znak $\geqslant$ (odnosno $>$) funkcija f je *konkavna* (odnosno *strogo konkavna*).

PRIMERI 6.8.4

1° Funkcija $f(x)=ax+b$ je konveksna (i konkavna) na realnoj pravoj jer je

$$\begin{aligned} f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) &= a(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+b = a(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+(\lambda_1+\lambda_2)b \\ &= \lambda_1(ax_1+b)+\lambda_2(ax_2+b) = \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

2° Funkcija $\varphi(x)=x^2$ je strogo konveksna na $\mathbf{R}$, što sledi iz

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) &= \lambda_1^2x_1^2+2\lambda_1\lambda_2x_1x_2+\lambda_2^2x_2^2 \\ &= \lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2-\lambda_1\lambda_2(x_1-x_2)^2 < \lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Geometrijski se smisao konveksnosti funkcije vidi iz sledećih razmatranja.

Neka je luk EF na slici 2 grafik konveksne funkcije $y=f(x)$ u intervalu (a,b). Uočimo proizvoljne tačke x_1, $x_2\in(a,b)$ $(x_1<x_2)$, kao i $x\in(x_1,x_2)$. Stavimo $\lambda_1=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$, $\lambda_2=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ i označimo $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$. Iz nejednakosti

$$f(x)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$$

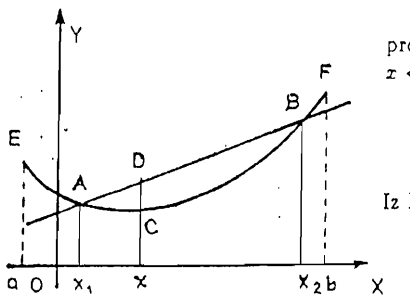
vidi se da tačka $C(x,f(x))$ grafika nije iznad tačke $D(x,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2)$ sečice, povučene kroz A i B.

Ako je f strogo konveksna, onda je tačka D iznad tačke C.

* H. Minkowski (1864–1909), nemački matematičar

STAV 6.8.5

Neka je funkcija $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ diferencijabilna. Da bi f bila konveksna (strogo konveksna) u (a,b) neophodno je i dovoljno da f' raste (strogo raste) u (a,b).



Sl. 6.8.2

Dokaz.

Dokažimo stav za slučaj konveksnosti.

Neka je f konveksna funkcija i x_1, x_2, x proizvoljne tačke iz (a,b), takve da je $x_1<x<x_2$. Napišimo x u obliku

$$x=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2.$$

Iz konveksnosti funkcije f sledi nejednakost

$$f(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),$$

odakle se dobija

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Stavljajući u ovoj nejednakosti najpre $x\to x_1$, a zatim $x\to x_2$, dobija se

$$\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(x_1)\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant f'(x_2)=\lim_{x\to x_2}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Obrnuto, pretpostavimo da f' raste i da su x_1, x_2, x proizvoljni brojevi iz intervala (a,b); tako da je $x_1<x<x_2$. Prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti, primenjenoj na funkciju f na segmentu $[x_1,x]$, odnosno $[x,x_2]$, imaćemo

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1),\qquad x_1<\xi_1<x,$$

odnosno

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2),\qquad x<\xi_2<x_2.$$

Kako je $f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$, to je

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

što znači da je funkcija f konveksna. ■

Primetimo da je f konkavna (strogo konkavna) funkcija u intervalu (a,b) ako i samo ako f' opada (strogo opada) na (a,b).

STAV 6.8.6

Neka funkcija $f:(a,b)\to\mathrm{R}$ ima u svakoj tački $x\in(a,b)$ drugi izvod. Da bi f bila konveksna (konkavna) na (a,b), neophodno je i dovoljno da bude $f''(x)\geqslant 0$ ($f''(x)\leqslant 0$) za $x\in(a,b)$.

Dokaz.

Kako je $f''(x)=(f'(x))'$, to ovaj stav sledi iz prethodnog. ■

STAV 6.8.7

Ako su f i f' definisane i neprekidne, a f'' je definisana i pozitivna (negativna) na (a,b), onda je f strogo konveksna (konkavna) na (a,b). ■

PRIMER 6.8.5

Funkcija $f(x)=x^2\ln x$, definisana u intervalu $(0,\infty)$, strogo je konveksna u intervalu $(e^{-3/2},\infty)$, a strogo konkavna u intervalu $(0,e^{-3/2})$. Naime, kako je $f''(x)=2\ln x+3$, to je $f''(x)>0$ (odn. $f''(x)<0$) za $x\in(e^{-3/2},\infty)$ (odn. za $x\in(0,e^{-3/2})$). ▲

STAV 6.8.8

Diferencijabilna funkcija u intervalu (a,b) je konveksna (konkavna) ako i samo ako tačke njenog grafika nisu ispod (iznad) tačaka njene tangente povučene u proizvoljnoj tački intervala (a,b). Funkcija je strogo konveksna (konkavna) ako i samo ako su tačke njenog grafika iznad (ispod) tačaka tangente povučene u proizvoljnoj tački intervala (a,b), ne uključujući tačku dodira.

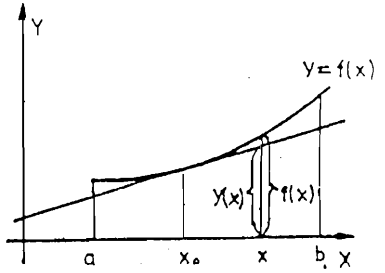
Dokaz.

Neka je u proizvoljnoj tački $x_0\in(a,b)$ povučena tangenta

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

na krivu $y=f(x)$, sl. 3. Uočimo proizvoljnu tačku $x\in(a,b)$. Tada je

$$f(x)-Y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$



Sl. 6.8.3

Primenjujući Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti na funkciju f u segmentu $[x_0,x]$ (ili $[x,x_0]$), imamo jednakost

$$f(x)-Y(x)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0),$$

za neko ξ između x_0 i x. Iz nje sledi: ako f' raste (strogo raste), onda je $f(x)-Y(x)\geqslant 0$ (>0), a ako opada (strogo opada), onda je $f(x)-Y(x)\leqslant 0$ (<0).

Obrnuto, ako je $f(x)-Y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\geqslant 0$ ($\leqslant 0$, >0, <0), onda je

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant f'(x_0)\qquad(\leqslant f'(x_0),\ >f'(x_0),\ <f'(x_0))\qquad\text{za}\quad x_0<x$$

i

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant f'(x_0)\qquad(\geqslant f'(x_0),\ <f'(x_0),\ >f'(x_0))\qquad\text{za}\quad x<x_0.$$

Za $x_1<x<x_2$ odavde sledi nejednakost

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\qquad(\geqslant,\ <,\ >),$$

što znači da je funkcija f konveksna (konkavna, strogo konveksna, strogo konkavna). ■

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini U tačke x_0 i diferencijabilna u $\mathring{U}$. Neka je, dalje, f neprekidna u tački x_0 i njen grafik u toj tački ima tangentu. Tačka $(x_0,f(x_0))$ naziva se *prevojnom tačkom* krive $y=f(x)$ ako je funkcija f strogo konveksna (konkavna) u skupu $\{x\in U\mid x>x_0\}$ i strogo konkavna (konveksna) u skupu $\{x\in U\mid x<x_0\}$.

Ako kriva $y=f(x)$ ima prevojnu tačku $(x_0,f(x_0))$ i funkcija f ima neprekidan drugi izvod u tački x_0, onda je $f''(x_0)=0$. Naime, ako to ne bi bilo, onda bi u nekoj okolini U tačke x_0 izvod $f''(x)$ bio pozitivan, odnosno negativan; tada bi prema stavu 7 funkcija $f(x)$, $x\in U$, bila konveksna, odnosno konkavna.

Pomenimo neke dovoljne uslove za postojanje prevojnih tačaka.

STAV 6.8.9

Neka je funkcija f diferencijabilna u nekoj okolini U tačke x_0 i dvaput diferencijabilna u $\mathring{U}$. Ako $f''(x)$ menja znak pri prolazu argumenta kroz tačku x_0, onda je $(x_0,f(x_0))$ prevojna tačka krive $y=f(x)$.

Dokaz.

Ako $f''(x)$ menja znak kada x prolazi kroz x_0, onda $f'(x)$ s jedne strane tačke x_0 raste, a s druge strane opada. Prema stavu 5, tačka $(x_0,f(x_0))$ je prevojna tačka krive $y=f(x)$. ■

STAV 6.8.10

Neka je $f''(x_0)=0$, a $f'''(x_0)\neq 0$. Tada je $(x_0,f(x_0))$ prevojna tačka krive $y=f(x)$.

Dokaz.

Napišimo Tejlorovu formulu za funkciju $f(x)$ u tački x_0

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),\qquad x\to x_0.$$

Posmatrajmo jednakost

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),\qquad x\to x_0.$$

Postoji okolina $\mathring{U}(x_0)$ tačke x_0 u kojoj desna strana te jednakosti ima znak sabirka $\frac{1}{6}f'''(x_0)(x-x_0)^3$. To znači da se tačke krive $y=f(x)$, $x\in\mathring{U}$, za $x<x_0$, odnosno $x>x_0$, nalaze sa različitih strana tangente povučene u tački $(x_0,f(x_0))$. Dakle, $(x_0,f(x_0))$ je prevojna tačka. ■

PRIMERI 6.8.6

1° Za funkciju $f(x) = (x-a)^5$ u tački $x = a$ je $f(a) = f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0$, a drugi izvod $f''(x) = 20(x-a)^3$ menja znak kad x prolazi kroz tačku $x = a$. Dakle, $(a, 0)$ je prevojna tačka krive $y = (x-a)^5$.

2° Nula drugog izvoda funkcije $f(x) = x^2 \ln x$ je $x_0 = e^{-3/2}$. Kako je $f'''(x) = 2/x$ i $f'''(e^{-3/2}) = 2e^{3/2} \neq 0$, to je $(e^{-3/2}, -3e^{-3}/2)$ prevojna tačka krive $y = x^2 \ln x$. ▲

Asimptote

Neka je funkcija $f(x)$ definisana za $x > M$ $(x < M)$ $(M$ — neki realan broj). Prava $y = ax + b$ naziva se *asimptotom* krive $y = f(x)$ za $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ ako je

$$f(x) = ax + b + o(1) \qquad \text{za} \quad x \to \infty \quad (x \to -\infty).$$

Iz ove definicije se dobija da je (u prvom slučaju)

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Odavde sledi

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{i} \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax). \tag{10}$$

Lako se vidi da i obrnuto, iz relacija (10) sledi da je prava $y = ax + b$ asimptota krive $y = f(x)$ za $x \to \infty$.

Analogno se određuje i asimptota krive za $x \to -\infty$.

Asimptota se obično naziva *kosom* ako je $a \neq 0$ i *horizontalnom* ako je $a = 0$.

PRIMERI 6.8.7

1° Funkcija $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$ definisana je za svako $x \in \mathbb{R}$. Odredimo asimptote $y = ax + b$ krive $y = f(x)$. Prema gornjim formulama je

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}) = \pm 1,$$

te su horizontalne asimptote date krive $y = 1$ $(x \to \infty)$ i $y = -1$ $(x \to -\infty)$.

2° Za kosu asimptotu $y = ax + b$ krive $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ imamo

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) = 5.$$

Dakle je $y = x + 5$ kosa asimptota za $x \to \pm\infty$.

Primetimo da se asimptota može naći i nešto drugačije. Naime, važi

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-2x+1} = x + 5 + \frac{12x-4}{x^2-2x+1} = x + 5 + o(1), \quad x \to \pm\infty,$$

odakle, po definiciji, sledi da je prava $y = x + 5$ asimptota. ▲

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u okolini $\mathring{U}(x_0)$ (ili za $x \in \mathring{U}(x_0)$, $x > x_0$, odnosno $x \in \mathring{U}(x_0)$, $x < x_0$) tačke x_0 i neka je $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ ili $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty$ i (ili) $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ ili $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$; tada se prava $x = x_0$ naziva *vertikalnom asimptotom* krive $y = f(x)$.

PRIMERI 6.8.8

1° Funkcija $f(x) = x^2 \ln x$ definisana je za $x > 0$. Pri tom je $\lim_{x\to+0} x^2 \ln x = -\infty$, pa je y-osa vertikalna asimptota krive $y = x^2 \ln x$.

2° Za funkciju $f(x) = e^{1/x}$ imamo $\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-0} f(x) = 0$, pa je y-osa vertikalna asimptota.

3° Kako je $\lim_{x\to1\pm0} \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty$, to je prava $x = 1$ asimptota krive $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. ▲

Grafičko prikazivanje funkcija

Često je veoma korisno, zbog što očiglednijeg sagledavanja svojstava funkcije, skicirati njen grafik. U cilju skiciranja grafika funkcije date analitičkim izrazom obično se koristi sledeća, ili njoj slična, shema:

1° Odrediti oblast definisanosti funkcije (u skladu sa konvencijom datom na početku četvrte glave).

2° Ispitati specijalna svojstva funkcije (parnost, periodičnost, ...).

3° Ispitati ponašanje funkcije na rubu domena; naći asimptote.

4° Odrediti nule i znak funkcije.

5° Naći prvi i drugi izvod funkcije.

6° Odrediti intervale monotonosti i ekstremne vrednosti.

7° Ispitati konveksnost i odrediti prevojne tačke.

8° Odrediti i sve ostale specifičnosti grafika date funkcije, a zatim skicirati taj grafik.

PRIMERI 6.8.9

1° Prikažimo grafički funkciju $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

Funkcija je definisana za sve vrednosti $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Vertikalna asimptota je prava $x = 1$. Iz jednakosti

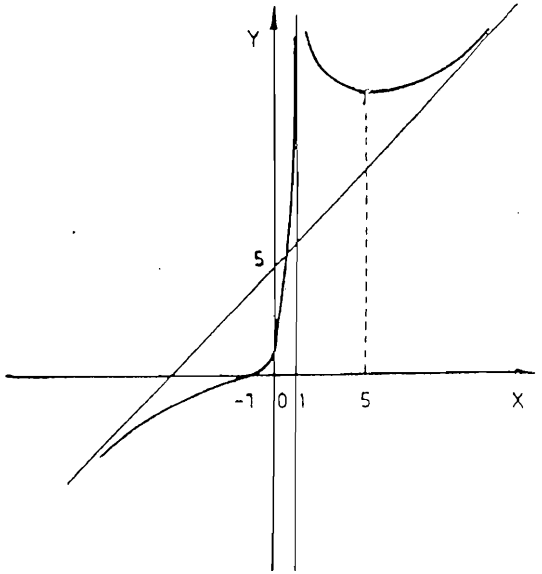
$$\lim_{x\to1+0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x\to1-0} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty$$

vidi se ponašanje funkcije u okolini tačke $x = 1$.

Kosa asimptota ima jednačinu $y = x + 5$. Iz

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = x + 5 + \frac{12}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

vidi se da se kriva približava asimptoti s gornje, odnosno s donje strane, kad $x \to \infty$, odnosno $x \to -\infty$.



Sl. 6.8.4

Pomoću prvog i drugog izvoda

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3},\qquad f''(x)=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

nalazimo lokalni minimum 13,5 za $x=5$. Funkcija raste u intervalima $(-\infty,1)$ i $(5,\infty)$, a opada u intervalu $(1,5)$. Prevojna tačka je $(-1,0)$. Funkcija je konveksna u intervalima $(-1,1)$ i $(1,\infty)$, a konkavna u intervalu $(-\infty,-1)$.

Prema nađenim podacima možemo nacrtati grafik date funkcije kao na slici 4.

2° Funkcija $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x^2}$ definisana je za $x\in\mathrm{R}$. Kako je

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2}=x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/3}=x+\frac{2}{3}-\frac{4}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\to\pm\infty,$$

to kriva $y=f(x)$ ima kosu asimptotu $y=x+\frac{2}{3}$ i približava joj se s gornje, odnosno donje strane, kad $x\to-\infty$, odnosno $x\to\infty$. Vrednosti funkcije su pozitivne za $x>-2$, $x\neq0$, a negativne za $x<-2$. Nule su joj u tačkama $x=0$, $x=-2$.

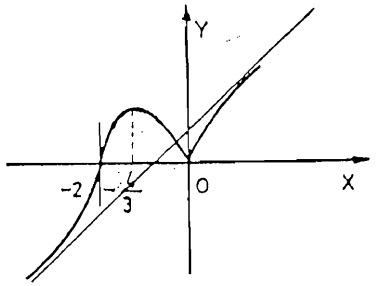
Iz

$$f'(x)=\frac{3x+4}{3\sqrt[3]{x(x+2)^2}},\qquad x\neq0,\quad x\neq-2,$$

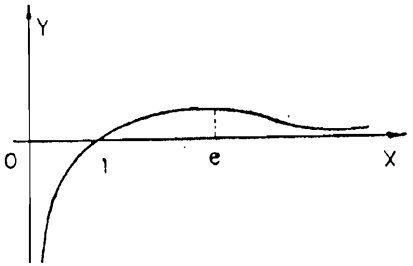
$$\lim_{x\to-2}f'(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to\pm0}f'(x)=\pm\infty,$$

$$f''(x)=\frac{-8x^2}{9x(x+2)\sqrt[3]{x(x+2)^2}},\qquad x\neq0,\quad x\neq-2$$

zaključujemo da funkcija raste u intervalima $(-\infty,-4/3)$, $(0,\infty)$, a opada u intervalu $(-4/3,0)$. U tački $x=-2$ kriva $y=f(x)$ ima vertikalnu tangentu, a u tački $x=0$ vertikalnu polutangentu. Tačka $(-4/3,2\sqrt[3]{4}/3)$ je tačka lokalnog maksimuma, a tačka $(0,0)$ je tačka lokalnog minimuma. Funkcija je konveksna u intervalu $(-\infty,-2)$, a konkavna u intervalima $(-2,0)$ i $(0,\infty)$. Tačka $(-2,0)$ je prevojna tačka grafika krive $y=f(x)$, sl. 5.



Sl. 6.8.5



Sl. 6.8.6

3° Funkcija $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ definisana je za $x>0$. Osa Oy je vertikalna asimptota, jer je $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$. Osa Ox je horizontalna asimptota, jer je $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

Nula funkcije je tačka $x=1$. Iz

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\qquad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

nalaze se interval rašćenja $(0,e)$ i opadanja (e,∞). Maksimum funkcije je u tački $x=e$, $f(e)=1/e$.

Prevojna tačka ima koordinate $(e^{3/2},3e^{-3/2}/2)$, a funkcija je konkavna u intervalu $(0,e^{3/2})$ i konveksna u intervalu $(e^{3/2},\infty)$, sl. 6. ▲

ZADACI

1. Dokazati identičnosti $\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,y\,\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$.

2. Naći izvode funkcija $\mathrm{th}\,x$ i $\mathrm{cth}\,x$.

3. Naći prve i druge izvode funkcija

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x^3\left(2+\sin\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Na primeru funkcije f izvesti zaključak da uslovi stava 8.2 nisu neophodni za egzistenciju lokalnog ekstremuma; na primeru funkcije g zaključiti da iz činjenice da kriva u nekoj tački prelazi s jedne na drugu stranu svoje tangente još ne sledi da joj je ta tačka prevojna.

4. Ako je f diferencijabilna funkcija u tački x, onda je

$$\lim_{n\in\mathbb{N},\, n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x).$$

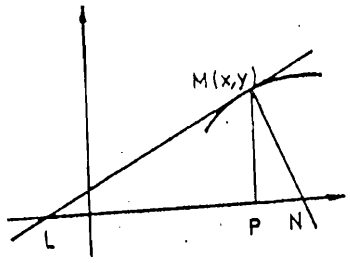
Dokazati. Da li važi obrnuto, tj. da li iz egzistencije tog limesa sledi diferencijabilnost funkcije f u tački x?

5. Pokazati da je funkcija $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{za } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{za } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ diferencijabilna samo u tački $x=0$.

6. Ispitati za koje $\alpha\in\mathbb{R}$ je funkcija $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & \text{za } x\neq 0,\\ 0, & \text{za } x=0\end{cases}$ 1° neprekidna; 2° diferencijabilna; 3° neprekidno diferencijabilna u tački 0.

7. Dokazati da je izvod parne (neparne) funkcije neparan (paran).

8. Na slici 1 dat je grafik funkcije $y=f(x)$ i povučene su tangenta i normala u tački $M(x,y)$. Duži LM, MN, LP, PN nazivaju se, respektivno: tangenta, normala, subtangenta, subnormala. Naći njihove dužine.



Sl. 6.9.1

9. Izračunati ugao između krivih (tj. ugao između njihovih tangenata) $y=\sin x$ i $y=\cos x$ u tačkama preseka.

10. Dokazati da je funkcija $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{za } x\neq 0,\\ 0, & \text{za } x=0,\end{cases}$ beskonačno diferencijabilna (tj. da ima izvod svakog reda) u tački $x=0$ (v. primer 8.3).

11. Ako su sve nule polinoma $P_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, $a_n\neq 0$, s realnim koeficijentima realne, onda i polinomi $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, $\dots$, $P_n^{(n-1)}(x)$ imaju sve nule realne. Dokazati.

12. Dokazati nejednakosti: 1° $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$, za $0<y<x$, $p>1$; 2° $|\cos x-\cos y|\leqslant|x-y|$; 3° $x-x^3/6<\sin x<x$, za $x>0$.

13. Izračunati limese:

$$1^\circ\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x};\qquad 2^\circ\ \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^\alpha},\ \alpha>0;\qquad 3^\circ\ \lim_{x\to+0}x^x;$$

$$4^\circ\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2};\qquad 5^\circ\ \lim_{x\to\infty}x\left[\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right];\qquad 6^\circ\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right).$$

14. Proceniti grešku približne jednakosti $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

15. Za koje vrednosti x važi približna formula $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ s tačnošću do 10^{-4}?

16. Napisati Maklorenov polinom funkcije e^x koji omogućava izračunavanje e^x za $-1\leqslant x\leqslant 2$ s tačnošću 10^{-3}.

17. 1° Neka je $f(x)$ konveksna funkcija na (a,b) i neka su λ_i, $i=1,2,\dots,n$, pozitivni brojevi, takvi da je $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. Dokazati *Jensenovu* nejednakost*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i),\qquad x_1,x_2,\dots,x_n\in(a,b).$$

2° Ako su $x_i\geqslant 0$, $\alpha_i\geqslant 0$ i $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha$, dokazati težinsku nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine

$$(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n})^{1/\alpha}\leqslant\frac{1}{\alpha}(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n).$$

18. Označimo sa $\Delta_s(a,b)=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{1/s}$ $(s\neq 0)$ i $\Delta_0(a,b)=\sqrt{ab}$ *sredinu reda s* pozitivnih brojeva a i b. Dokazati:

1° funkcija $\Delta_s(a,b)$ je neprekidna u tački $s=0$;
2° $\min(a,b)\leqslant\Delta_s(a,b)\leqslant\max(a,b)$ za svako s;
3° za $a\neq b$ funkcija $\Delta_s(a,b)$ je strogo rastuća funkcija od s;
4° $\lim_{s\to-\infty}\Delta_s(a,b)=\min(a,b)$, $\lim_{s\to\infty}\Delta_s(a,b)=\max(a,b)$.

19. Neka je funkcija f diferencijabilna $n+1$ puta u tački x i neka je $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. Ako je

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+h^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

$0<\theta<1$, dokazati da je $\lim_{h\to 0}\theta=1/(n+1)$.

20. Ako funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, definisana na konačnom ili beskonačnom intervalu (a,b), ima ograničen izvod f', onda ona zadovoljava Lipšicov uslov (v. zadatak 5.5), pa je, samim tim, ravnomerno neprekidna. Dokazati.

* I. L. Jensen (1859–1925), danski matematičar

7. NEODREĐENI INTEGRAL

7.1. PRIMITIVNA FUNKCIJA I NEODREĐENI INTEGRAL

Neka je funkcija $f(x)$ definisana u intervalu (a,b). *Primitivnom funkcijom* funkcije $f(x)$ nazovimo funkciju $\varphi(x)$, $x \in (a,b)$, ako je ova diferencijabilna i zadovoljava jednakost $\varphi'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

PRIMERI 7.1.1

1° Funkcija $\varphi(x) = \sin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \cos x$ za $x \in \mathrm{R}$, jer je $\varphi'(x) = f(x)$, $x \in \mathrm{R}$.

2° Brzina $v(t)$ materijalne tačke data je jednakošću $v(t) = 2t + 1$, $t \geqslant 0$. Ako je pređeni put $s(t)$ na početku kretanja bio jednak nuli, lako se proverava da je $s(t) = t^2 + t$, $t \geqslant 0$, jer je $s'(t) = v(t)$ i pri tom je $s(0) = 0$. Funkcija $s(t) = t^2 + t$ je jedna primitivna funkcija funkcije $v(t) = 2t + 1$ za $t \geqslant 0$.

3° Nagib $f(x)$ tangente u proizvoljnoj tački (x, y) neke krive dat je jednakošću $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$, $x \in \mathrm{R}$. Jedna od krivih koje zadovoljavaju dati uslov je kriva $y = \frac{e^x}{e^x+1}$, jer je $y' = f(x)$, $x \in \mathrm{R}$. ▲

Ako je $\varphi(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, lako se vidi da je onda i $\varphi(x)+C$ (C je proizvoljna konstanta) primitivna funkcija funkcije $f(x)$. U sledećem stavu ćemo pokazati da se, u određenom smislu, sve primitivne funkcije date funkcije mogu dobiti na takav način.

STAV 7.1.1

Ako je $\varphi(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, onda je i $\varphi(x) + C$ takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Ako su $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ dve primitivne funkcije od $f(x)$ u nekom intervalu, onda je razlika $\psi(x) - \varphi(x)$ konstantna u tom intervalu.

Dokaz.

Ovaj stav je na drugi način formulisana posledica 6.6.1. Naime, pretpostavimo da je $\varphi'(x) = \psi'(x) = f(x)$ i posmatrajmo funkciju $F(x) = \psi(x) - \varphi(x)$. Iz jednakosti $F'(x) = \psi'(x) - \varphi'(x) = 0$ na datom intervalu, na osnovu stava 6.6.2, sledi $F(x) = C$, odakle je $\psi(x) - \varphi(x) = C$. ■

Primetimo da je u gornjem stavu bitna pretpostavka da se razlika $\psi(x) - \varphi(x)$ primitivnih funkcija od $f(x)$ posmatra u intervalu, a ne na proizvoljnom skupu. Naime, stav 6.6.2 se formuliše za interval.

PRIMER 7.1.2

Jedna primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ za $x \in \mathrm{R}$ je $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$. No, kako je $\left(\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ za $x \neq 0$, to je u svakom od intervala $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ funkcija $\psi(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ primitivna za funkciju $f(x)$. Razlika tih primitivnih funkcija je

$$\psi(x) - \varphi(x) = \begin{cases} \pi, & \text{za } x \in (-\infty, 0), \\ 0, & \text{za } x \in (0, \infty). \end{cases} \blacktriangle$$

DEFINICIJA 7.1.1

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ naziva se *neodređenim integralom* funkcije $f(x)$ i označava sa

$$\int f(x)\,dx.$$

U ovoj definiciji $f(x)$ se naziva *podintegralnom funkcijom (integrandom)*, dok je $f(x)\,dx$ *podintegralni izraz.*

Ako je $\varphi(x)$ jedna primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na nekom intervalu, onda se, prema stavu 1, skup $\int f(x)\,dx$ na tom intervalu može napisati u obliku $\{\varphi(x) + C \mid C \in \mathrm{R}\}$, što ćemo kraće pisati u obliku

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C.$$

Osnovna svojstva neodređenog integrala data su sledećim stavom.

STAV 7.1.2

Neka je $\varphi(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na nekom intervalu. Tada je:

1° $d(\int f(x)\,dx) = f(x)\,dx$;

2° $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C$;

3° $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, *za* $k \in \mathrm{R}$;

4° *za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ važi jednakost* $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Dokaz.

Kako je $\varphi'(x) = f(x)$, to je $d(\int f(x)\,dx) = d(\varphi(x) + C) = \varphi'(x)\,dx = f(x)\,dx$ i $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$.

Jednakost 3° sledi iz jednakosti izvoda jedne i druge strane, tj. $\left(\int kf(x)\,dx\right)' = kf(x)$ i $\left(k\int f(x)\,dx\right)' = k\left(\int f(x)\,dx\right)' = kf(x)$.

Za dokaz jednakosti 4° primetimo da je $\left(\int (f(x) + g(x))\,dx\right)' = f(x) + g(x)$ i $\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) + g(x)$. ■

Neodređeni integrali imaju mnoge primene. Neke od njih su pokazane u primerima 1, a neke druge videćemo docnije. Radi toga je od interesa nalaženje primitivne funkcije, odnosno neodređenog integrala, neke date funkcije.

Tablica neodredenih integrala

Imajući u vidu tablicu izvoda elementarnih funkcija iz odeljka 6.2, navešćemo tablicu neodredenih integrala nekih elementarnih funkcija. Provera pokazuje ispravnost tablice. Primetimo da ako je neka od navedenih podintegralnih funkcija definisana na uniji disjunktnih otvorenih intervala (takva je, na primer, funkcija $1/x$ koja je definisana na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$), onda konstanta C može biti različita na svakom od tih intervala.

$$1^\circ\quad \int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq -1,$$

$$2^\circ\quad \int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$3^\circ\quad \int e^x\,dx=e^x+C,$$

$$4^\circ\quad \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\quad a>0,\ a\neq 1,$$

$$5^\circ\quad \int \sin x\,dx=-\cos x+C,$$

$$6^\circ\quad \int \cos x\,dx=\sin x+C,$$

$$7^\circ\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C,$$

$$8^\circ\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C,$$

$$9^\circ\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$$

$$10^\circ\quad \int \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C,$$

$$11^\circ\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm 1}|+C,$$

$$12^\circ\quad \int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

Upotrebu gornje tablice i stava 2 pokazaćemo na primerima.

PRIMERI 7.1.3

1° $\int(2x^3+5x+\sqrt{3})\,dx=2\int x^3\,dx+5\int x\,dx+\sqrt{3}\int dx=\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2+x\sqrt{3}+C.$

2° $\displaystyle\int\frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2}\,dx=2\int x^{-2}\,dx-\int\frac{dx}{x}+2\int x^{-3/2}\,dx-\int x^{-1/2}\,dx=$
$\displaystyle-\frac{2}{x}-\ln x-\frac{4}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}+C.$

3° $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx=\int x^{7/8}\,dx=\frac{8}{15}x\sqrt[8]{x^7}+C.$ ▲

7.2. SMENA PROMENLJIVE. PARCIJALNA INTEGRACIJA

Smena promenljive

STAV 7.2.1

Neka je $\varphi\colon A\to\mathbf{R}$ primitivna funkcija funkcije $f(t)$, $t\in A$ i neka je $g\colon B\to A$ diferencijabilna za $x\in B$, gde su A i B intervali. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $f(g(x))g'(x)$, $x\in B$ i pri tom važi jednakost

$$(1)\qquad \int f(g(x))g'(x)\,dx=\varphi(g(x))+C.$$

Dokaz.

Dokažimo da su izvodi leve i desne strane jednakosti (1) jednaki. Zaista je

$$\left(\int f(g(x))g'(x)\,dx\right)'=f(g(x))g'(x),$$

a s druge strane je

$$(\varphi(g(x))+C)'=\varphi'_g(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x).\quad\blacksquare$$

PRIMERI 7.2.1

1° Ako je $\int f(x)\,dx=\varphi(x)+C$, onda je za $a,b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$,

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\varphi(ax+b)+C.$$

Zaista, dovoljno je u prethodnom stavu uzeti $g(x)=ax+b$. Specijalno, korišćenjem ovakve linearne smene možemo dobiti, na primer, sledeće integrale:

$$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C,\ \text{za } a\neq 0,\ n\neq -1,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x}}=-\frac{2}{3}\sqrt{2-3x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{2x^2+4x+20}=\frac{1}{18}\int\frac{dx}{((x+1)/3)^2+1}=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{4}{3}x+1)^2-1}}=\frac{\ln|4x+3+\sqrt{8(2x^2+3x)}|}{\sqrt{2}}+C,$$

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

2° Smenom $x^2=t$ dobija se $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

3° $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{e^x+1}+C$, smenom $e^x+1=t$.

4° Smena $\ln x=t$ daje $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|\ln x|+C.$

5° $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$, smenom $\sin x = t$.

6° U cilju integrisanja nekih funkcija koriste se sledeće trigonometrijske identičnosti:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Na primer, $\int \cos 4x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 7x)\,dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{14}\sin 7x + C$. ▲

Osim jednakosti (1) koristi se i jednakost

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt = \varphi(t)+C = \varphi(g^{-1}(x))+C, \tag{2}$$

gde je $x = g(t)$, $t = g^{-1}(x)$ (dakle, pretpostavlja se da funkcija g ima inverznu), a $\varphi(t)$ je primitivna funkcija funkcije $f(g(t))g'(t)$.

PRIMER 7.2.2

Izračunajmo $J = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$. Uvedimo smenu $x = a\sin t$. Tada je

$$J = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2\int\cos^2 t\,dt = a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$
$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Napomenimo da je $-a<x<a$ i $\pi/2<t<\pi/2$. ▲

Parcijalna integracija

STAV 7.2.2

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i pri tom važi jednakost

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,du(x). \tag{3}$$

Dokaz.

Polazeći od jednakosti $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ dobija se

$$\int (u(x)v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx,$$

odakle sledi (3). ■

PRIMERI 7.2.3

1° $\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$; pri tom je uzeto $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$, $du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \frac{1}{3}x^3$.

2° Nađimo $J = \int e^x\sin x\,dx$.

Stavimo $u = e^x$, $dv = \sin x\,dx$, $du = e^x\,dx$, $v = -\cos x$, pa je

$$J = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx.$$

Na $\int e^x\cos x\,dx$ primenimo formulu (3) sa $u = e^x$, $v = \sin x$, što daje

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx.$$

Dakle je $J = -e^x\cos x + e^x\sin x - J$ ili

$$J = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

3° Označimo $J_n = \int x^n e^x\,dx$, $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$. Stavljajući $u = x^n$, $dv = e^x\,dx$, prema (3) imamo za $n\in\mathbf{N}$

$$J_n = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx = x^n e^x - nJ_{n-1}.$$

Kako je $J_0 = \int e^x\,dx = e^x + C$, to je

$$J_n = x^n e^x - n[x^{n-1} - (n-1)J_{n-2}] = \cdots$$
$$= e^x[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}n!] + C.$$

4° Nađimo $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ za $n\in\mathbf{N}$.

Stavimo $u = \frac{1}{(x^2+1)^n}$, $dv = dx$, $du = -\frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$, $v = x$. Formula (3) daje

$$J_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(J_n - J_{n+1}),$$

odakle je

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)J_n\right), \qquad n\in\mathbf{N}.$$

Po ovoj rekurentnoj formuli možemo naći J_{n+1} za $n \in \mathbb{N}$, jer je $J_1 = \operatorname{arctg} x + C$ poznato. ▲

7.3. NEKA SVOJSTVA RACIONALNIH FUNKCIJA

U ovom odeljku biće navedena neka svojstva polinoma i racionalnih funkcija koja se koriste pri integraciji. Izvesna svojstva će biti dokazana, dok će kod drugih dokaz biti izostavljen; za te dokaze čitalac se upućuje na literaturu koja tretira ta pitanja.

Svaku racionalnu funkciju $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ možemo napisati u obliku

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{r(x)}{P(x)},$$

gde je $T(x)$ polinom, a $\dfrac{r(x)}{P(x)}$ racionalna funkcija kod koje je stepen polinoma $r(x)$ manji od stepena polinoma $P(x)$ (takva racionalna funkcija se nekad naziva *pravim razlomkom*).

Ako je $P(x) = x - a$, tada se polinom $Q(x)$ može napisati u obliku

$$Q(x) = T(x)(x - a) + r,$$

gde je $r \in \mathbb{R}$ konstanta. Za $r = 0$ kaže se da je $Q(x)$ *deljiv* sa $x - a$. Iz ove jednakosti sledi

STAV 7.3.1
Polinom $Q(x)$ deljiv je sa $x - a$ ako i samo ako je $Q(a) = 0$. ■

Iz ovog stava i teoreme 2.9.1 sledi

STAV 7.3.2
Svaki polinom stepena $n \geqslant 1$ ima tačno n nula (realnih ili kompleksnih). ■

Jasno je da među n nula polinoma $Q(x)$ može biti i jednakih. Prema tome, ako su $a_1, \ldots, a_m$ sve različite nule polinoma $Q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$, onda se može napisati

$$(1) \qquad Q(x) = c_n(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdots (x - a_m)^{k_m}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Pri tom se broj k_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, naziva redom nule a_i.

STAV 7.3.3
Ako je kompleksan broj $z = \alpha + i\beta$ nula polinoma $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ sa realnim koeficijentima c_i, onda je i njemu konjugovan broj $\overline{z} = \alpha - i\beta$ takođe nula polinoma $Q(x)$.

Dokaz.

Podsetimo se (v. stav 2.9.3) da za dva proizvoljna kompleksna broja z_1 i z_2 važe jednakosti $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. Kako je z nula polinoma $Q(x)$, to je $Q(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i = 0$. Zato je

$$Q(\overline{z}) = \sum_{i=0}^{n} c_i \overline{z}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{c_i} \cdot \overline{z}^i = \overline{\sum_{i=0}^{n} c_i z^i} = \overline{Q(z)} = 0. \quad ■$$

Na osnovu gornjeg stava zaključujemo da ako polinom $Q(x)$ ima realne koeficijente i kompleksnu nulu $z_1 = \alpha + i\beta$, onda on ima i nulu $z_2 = \alpha - i\beta$, pa je deljiv sa

$$(x - z_1)(x - z_2) = (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + px + q,$$

gde $p, q \in \mathbb{R}$ i $p^2 - 4q < 0$. Imajući u vidu ovu primedbu, kao i jednakost (1), polinom $Q(x)$ sa realnim koeficijentima, od kojih je onaj uz najviši stepen promenljive jedinica, može se napisati u obliku

$$(2) \qquad Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_p)^{k_p}(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_q x + c_q)^{l_q},$$

gde je $k_1 + \cdots + k_p + 2(l_1 + \cdots + l_q) = n$, n je stepen polinoma Q, a_i, b_j, c_j su realni brojevi i $b_j^2 - 4c_j < 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

Navedimo sada teoremu o razlaganju racionalne funkcije.

TEOREMA 7.3.1
Neka je $P(x)$ polinom stepena manjeg od n, a $Q(x)$ polinom oblika (2). Tada se $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ može napisati u obliku

$$(3) \qquad R(x) = \left[\frac{A_{11}}{x - a_1} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x - a_1)^{k_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{A_{p1}}{x - a_p} + \cdots + \frac{A_{pk_p}}{(x - a_p)^{k_p}}\right]$$
$$+ \left[\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1}}\right] + \cdots$$
$$+ \left[\frac{B_{q1}x + C_{q1}}{x^2 + b_q x + c_q} + \cdots + \frac{B_{ql_q}x + C_{ql_q}}{(x^2 + b_q x + c_q)^{l_q}}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{l_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j}.$$

Dokaz.

Ova teorema je posledica sledeće dve leme.

LEMA 7.3.1

Neka je a realna nula reda k polinoma $Q(x)$, tj. neka je $Q(x) = (x-a)^k Q_1(x)$, $Q_1(a) \neq 0$ i neka je $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pravi razlomak. Tada se on može napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-s}Q_1(x)},$$

gde je A konstanta, s je prirodan broj, $1 \leqslant s \leqslant k$, a poslednji razlomak je pravi.

Dokaz.

Uočimo jednakost

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)},$$

koja se može napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^k Q_1(x)},$$

gde je A proizvoljan broj.

Stepen polinoma $P(x) - AQ_1(x)$ je manji od stepena polinoma $Q(x)$. Naime, stepen od $P(x)$, kao i od $Q_1(x)$, manji je od stepena od $Q(x)$. Dakle, poslednji razlomak je pravi. Odredimo A tako da bude $P(a) - AQ_1(a) = 0$, tj. $A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. Nađimo s tako da

$$P_1(x) = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^s}$$

ne bude deljivo sa $x - a$. Tada će racionalna funkcija

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-s}Q_1(x)}$$

biti pravi razlomak. ■

LEMA 7.3.2

Neka je $\frac{P(x)}{Q(x)}$ pravi razlomak i $Q(x)$ se može napisati u obliku $Q(x) = (x^2+ax+b)^k Q_1(x)$, $a^2 - 4b < 0$, a x^2+ax+b i $Q_1(x)$ nemaju zajedničkih nula. Tada se $\frac{P(x)}{Q(x)}$ može na jedinstven način napisati u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^k} + \frac{P_1(x)}{(x^2+ax+b)^{k-s}Q_1(x)}, \quad 1 \leqslant s \leqslant k,$$

gde su A i B konstante, a poslednji razlomak je pravi.

Dokaz.

Jednakost $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+ax+b)^k Q_1(x)}$ napišimo u obliku

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^k} + \frac{P(x) - (Ax+B)Q_1(x)}{(x^2+ax+b)^k Q_1(x)}.$$

Primetimo da je stepen polinoma $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)$ manji od stepena polinoma $(x^2+ax+b)^k Q_1(x)$. Odredimo A i B tako da $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)$ bude deljivo sa x^2+ax+b. Označimo nulu polinoma x^2+ax+b sa $z_1 = \alpha + i\beta$. Tada je $P(z_1)-(Az_1+B)Q_1(z_1) = 0$, odakle je $Az_1 + B = \frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$. Označimo li kompleksan broj $\frac{P(z_1)}{Q_1(z_1)}$ sa $\gamma+i\delta$, imamo $A(\alpha+i\beta)+B = \gamma+i\delta$, odnosno $(A\alpha+B)+A\beta i = \gamma+i\delta$, odakle je

$$A = \frac{\delta}{\beta}, \qquad B = \gamma - \frac{\alpha\delta}{\beta}.$$

Kako je i broj $\overline{z_1} = \alpha - i\beta$ nula polinoma x^2+ax+b, to je $P(x)-(Ax+B)Q_1(x)$ deljiv sa $(x^2+ax+b)^s$ za neko s, $1 \leqslant s \leqslant k$, a pri tom količnik

$$P_1(x) = \frac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{(x^2+ax+b)^s}$$

nije deljiv sa x^2+ax+b. Skraćivanjem razlomka

$$\frac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{(x^2+ax+b)^k Q_1(x)}$$

sa $(x^2+ax+b)^s$ dobijamo pravi razlomak $\frac{P_1(x)}{(x^2+ax+b)^{k-s}Q_1(x)}$. ■

Koeficijente A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} u teoremi 1 dobijamo metodom neodređenih koeficijenata. Ova metoda se sastoji u sledećem: za datu funkciju $R(x)$ pretpostavi se da važi jednakost (3) u kojoj su A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} neodređeni koeficijenti; množenjem te jednakosti sa $P(x)$ dobijaju se na levoj i desnoj strani polinomi; kako su dva polinoma identički jednaka ako i samo ako su im jednaki koeficijenti uz iste stepene od x, to se izjednačavanjem ovih koeficijenata dobija sistem jednačina za određivanje A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.

Nazovimo razlomke oblika $\frac{A}{(x-a)^k}$ i $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$ *prostim razlomcima.*

PRIMERI 7.3.1

1° Razložimo $\frac{5x+1}{x^2+x-2}$ na proste razlomke.

Napišimo

$$\frac{5x+1}{x^2+x-2} = \frac{5x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}.$$

Odavde je

$$5x+1 = A(x-1) + B(x+2) = (A+B)x + (2B-A).$$

Iz jednačina $A+B=5$, $2B-A=1$ dobija se $A=3$, $B=2$.

2° Razložimo na proste razlomke $\dfrac{-2x^2+x-2}{x^3-x^2}$.

Iz

$$\frac{-2x^2+x-2}{x^3-x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

dobija se

$$-2x^2+x-2=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2=(A+C)x^2+(B-A)x-B,$$

odnosno

$$A+C=-2,\quad B-A=1,\quad -B=-2,$$

odakle je $A=1$, $B=2$, $C=-3$.

3° Napišimo $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ u obliku

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.$$

Posle množenja sa $(x-2)(x^2+1)^2$ dobija se

$$2x^2+2x+13=(A+B_1)x^4+(-2B_1+C_1)x^3+(2A+B_1-2C_1+B_2)x^2$$
$$+(-2B_1+C_1-2B_2+C_2)x+(A-2C_1-2C_2),$$

odakle je $A=1$, $B_1=-1$, $C_1=-2$, $B_2=-3$, $C_2=-4$. ▲

7.4. INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

Svaku racionalnu funkciju možemo razložiti, prema onom što je rečeno u prethodnom odeljku, na zbir polinoma i prostih razlomaka. Dakle se integracija racionalne funkcije svodi na integraciju polinoma i prostih razlomaka. Razmotrimo integrisanje prostih razlomaka.

(a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C.$

(b) Za $k>1$ je

$$\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\int\frac{dt}{t^k}=\frac{1}{(1-k)t^{k-1}}+C=-\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}+C,$$

gde je stavljeno $x-a=t$.

(c) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$, za $a\neq 0$.

(d) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$, za $a\neq 0$.

(e) Za $n>1$, $a\neq 0$ je

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^{2n}}\int\frac{dx}{[(x/a)^2+1]^n}=\frac{1}{a^{2n-1}}\int\frac{dt}{(t^2+1)^n},$$

gde je $x/a=t$. Označimo $I_n=\displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+1)^n}$. Tada je, prema primeru 2.3.4°, $I_n=\dfrac{1}{2n-2}\left(\dfrac{t}{(t^2+1)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right)$ za $n=2,3,\ldots$.

(f) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^n}=-\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+C$, gde je $a\neq 0$, $x^2+a^2=t$.

Primetimo da se integrali $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+ax+b)^n}$ i $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x^2+ax+b)^n}$, $n\geqslant 1$, $a^2-4b<0$, smenom $x=-\dfrac{a}{2}t\sqrt{b-\dfrac{a^2}{4}}$ dovode na integrale oblika (c), (d), (e) ili (f).

PRIMERI 7.4.1

1° $\displaystyle\int\frac{x^4+3x^3-1}{(x+1)^2}\,dx=\int\left[x^2+x-3+\frac{5}{x+1}-\frac{3}{(x+1)^2}\right]dx=$
$\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-3x+5\ln|x+1|+\dfrac{3}{x+1}+C.$

2° $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+x^2}=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$

3° $\displaystyle\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\right)dx.$ Nađimo posebno (v. primer 2.3.4°):

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C,$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C,$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\operatorname{arctg}x\right)+C.$$

Uzimajući u obzir ove integrale imamo

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-4\operatorname{arctg}x+\frac{3}{2(x^2+1)}-\frac{2x}{x^2+1}+C,$$

gde je aditivna konstanta C pisana samo jednom. ▲

7.5. INTEGRACIJA NEKIH IRACIONALNIH FUNKCIJA

U ovom odeljku pokazaćemo kako se integrišu neki tipovi algebarskih i transcendentnih funkcija.

$$\int \mathrm{R}\left(\mathrm{x}, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) \mathrm{dx}$$

Prva od klasa iracionalnih funkcija koje ćemo pomenuti, a čiji se integrali pogodnim smenama mogu svesti na integrisanje racionalnih funkcija, ima oblik kao u podnaslovu, gde je sa R označena racionalna funkcija svojih argumenata, a $n_1, \ldots, n_k$ su prirodni brojevi. Neka je n najmanji zajednički sadržalac tih brojeva. Uvedimo smenu $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}=t^n$. Tada je $x=\dfrac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\,dt$, pa je

$$R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx = R\left(\frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}, t^{n/n_1}, \ldots, t^{n/n_k}\right)\varphi'(t)\,dt,$$

tj. dati integral se svodi na integral racionalne funkcije.

PRIMER 7.5.1

Smenom $x+1=t^6$ dobija se

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1}\,dx &= 6\int \frac{t^3-1}{t^2+1}\cdot t^5\,dt\\ &= 6\int\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt\\ &= 6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)+\operatorname{arctg} t\right)+C. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Ojlerove smene

Integral

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \tag{1}$$

se u slučaju $a>0$ smenom $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ (*prva Ojlerova smena*) svodi na integral racionalne funkcije. Naime, lako dobijamo

$$x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a}+b},\quad dx=2\frac{t^2\sqrt{a}+bt+c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a}+b)^2}\,dt,$$

odakle sledi tvrđenje.

Ako su x_1, x_2 međusobno različiti realni koreni kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$, onda se smenom $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ (*treća Ojlerova smena*) integral (1) svodi na integral racionalne funkcije. To se vidi iz

$$x=\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a},\quad dx=\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

Drugu Ojlerovu smenu ovde ne pominjemo (v. zadatak 2), jer su navedene dve dovoljne za nalaženje bilo kog integrala tipa (1) (v. zadatak 3).

PRIMERI 7.5.2

1° $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int\left(\frac{t^2+1}{2t^2}\Big/\frac{t^2+1}{2t}\right)dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=$ $\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C$, gde je stavljeno $\sqrt{x^2+1}=t-x$, $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$, $dx=\dfrac{t^2+1}{2t^2}\,dt$.

2° Nađimo $J=\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$. Uvedimo smenu $\sqrt{1-x^2}=t(x+1)$. Odavde je $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{-4t\,dt}{(1+t^2)^2}$, $1+x^2=\dfrac{2(1+t^4)}{1+t^2}$, pa je

$$\begin{aligned}J&=-\int\frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right)dt\\ &=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)\right)+C,\quad t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Integracija trigonometrijskih funkcija

Integral oblika $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, gde je R racionalna funkcija, svodi se smenom $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$ na integral racionalne funkcije. Naime, lako dobijamo

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=2\frac{dt}{1+t^2},$$

pa podintegralni izraz postaje $R\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, dakle racionalan.

U nekim slučajevima za integral ovog oblika ima smena koje su prikladnije od gore pomenute.

Ako je izraz $R(\sin x,\cos x)=\dfrac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}$, gde su P i Q polinomi, takav da je jedan od tih polinoma neparan, a drugi paran po $\sin x$ (odnosno $\cos x$), onda se $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ smenom $\cos x=t$ (odnosno $\sin x=t$) svodi na integral racionalne funkcije. Pretpostavimo, određenosti radi, da je $P(-\sin x,\cos x)=-P(\sin x,\cos x)$, $Q(-\sin x,\cos x)=Q(\sin x,\cos x)$. Tada je

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{S(1-\cos^2x,\cos x)\sin x}{T(1-\cos^2x,\cos x)},$$

gde su S i T polinomi, pa smenom $\cos x=t$ dobijamo

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=-\int\frac{S(1-t^2,t)}{T(1-t^2,t)}\,dt.$$

Ako je $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, onda se integral $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ smenom $\operatorname{tg}x=t$ svodi na integral racionalne funkcije; pri tom je

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad x=\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

PRIMERI 7.5.3

$$1^\circ \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t.$$

$$2^\circ \int \sin^3 x\cos^3 x\,dx = -\int(1-t^2)t^2\,dt = \frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C = \frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C,$$

$\cos x = t$.

$$3^\circ \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt = \frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C = \frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{\sin x}+C,\ \sin x = t.$$

$$4^\circ \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)+C,$$

$\operatorname{tg} x = t$. ▲

$\int R(e^x)\,dx$

Ako je podintegralna funkcija oblika $R(e^x)$, gde je R racionalna funkcija, onda se odgovarajući integral smenom $e^x = t$ svodi na integral racionalne funkcije. Zaista, iz $e^x = t$ sledi $e^x\,dx = dt$, pa je $\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}\,dt$.

PRIMER 7.5.4

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{t\,dt}{1+t} = t-\ln|1+t|+C = e^x-\ln(1+e^x)+C.\ \blacktriangle$$

7.6. NEKI INTEGRALI KOJI SE NE IZRAŽAVAJU POMOĆU ELEMENTARNIH FUNKCIJA

U prethodnim odeljcima videli smo kako se nalaze primitivne funkcije nekih klasa elementarnih funkcija. Dokazano je, međutim, da primitivna funkcija elementarne funkcije ne mora biti elementarna funkcija. Može se, na primer, pokazati da

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \sin x^2\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

nisu elementarne funkcije. Naglasimo, međutim, da to ne znači da one uopšte ne postoje — u narednoj glavi ćemo pokazati da svaka neprekidna funkcija ima primitivnu.

Eliptički integrali

Jedan od tipova integrala koji nisu uvek elementarne funkcije su *eliptički integrali*. Pod eliptičkim integralima podrazumevamo integrale oblika

$$(1)\qquad \int R(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx,$$

$$(2)\qquad \int R(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx,$$

gde je R racionalna funkcija.

Nekad integrali (1) i (2) mogu biti elementarne funkcije. Na primer, $\int \frac{5x^3+2}{2\sqrt{x^3+1}}\,dx = x\sqrt{x^3+1}+C$, pa funkcija $\frac{5x^3+2}{2\sqrt{x^3+1}}$ ima elementarnu primitivnu funkciju. Ako se integral (1) ili (2) izražava elementarnom funkcijom, naziva se *pseudoeliptičkim integralom*.

Vratimo se eliptičkim integralima. Pokazano je (v. npr. [29]) da se svaki eliptički integral može svesti, do na sabirak koji je elementarna funkcija, na jedan od sledeća tri integrala:

$$(3)\qquad \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\quad \text{(eliptički integral I vrste)},$$

$$(4)\qquad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\quad \text{(eliptički integral II vrste)},$$

$$(5)\qquad \int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\quad \text{(eliptički integral III vrste)}.$$

Pri tom je $0<k<1$, a parametar h može imati i kompleksne vrednosti. Pokazano je da integrali (3), (4) i (5) nisu elementarne funkcije.

Smenom $z=\sin\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, Ležandr* je integrale (3), (4) i (5) sveo na oblike

$$(6)\qquad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$(8)\qquad \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Integrali (6),

$$(7)\qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

i (8) nazivaju se eliptičkim integralima u Ležandrovom obliku I, II i III vrste, respektivno (kanonski oblik eliptičkih integrala).

Posebno su proučeni integrali (6) i (7). Naime, odredimo konstante u njima tako da vrednost tih integrala za $\varphi = 0$ bude 0. Dobijene funkcije označimo sa $F(k,\varphi)$, odnosno $E(k,\varphi)$, tj.

$$F(k,\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,\quad F(k,0)=0,$$

$$E(k,\varphi) = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad E(k,0)=0.$$

* A. M. Legendre (1752–1833), francuski matematičar

Dakle, funkcije $F(k,\varphi)$ i $E(k,\varphi)$ su neelementarne funkcije definisane neodredenim integralima. Njihova svojstva su proučena, a formirane su i tablice njihovih vrednosti. Primenjuju se u mnogim teorijskim i praktičnim problemima.

ZADACI

1. Dokazati da ne postoji funkcija $\varphi(x)$, takva da za $x \in \mathrm{R}$ važi $\varphi'(x) = \operatorname{sgn} x$.

2. Dokazati da se integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, $c > 0$, svodi na integral racionalne funkcije smenom $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ (II Ojlerova smena).

3. Dokazati da se pomoću prve i treće Ojlerove smene može integrisati svaki integral oblika $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

4. Dokazati da se *integral binomnog diferencijala*

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx, \quad m,n,p \in \mathrm{Q},$$

svodi na integral $\int t^q(a+bt)^p\,dt$, $q = -1 + (m+1)/n$. Ako je jedan od brojeva p, q, $p+q$ ceo, onda se poslednji integral izražava pomoću elementarnih funkcija. (Čebišev* je pokazao da su to i jedini slučajevi kada je to moguće.)

5. Integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ izraziti pomoću integrala u kanonskom obliku.

6. Dokazati da je:

1° $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x\,dx + C$; 2° $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$; 3° $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \theta x + C$;

4° $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C$; 5° $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x + C$; 6° $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arch} x + C$;

7° $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arth} x + C$ $(|x|<1)$; 8° $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arcth} x + C$ $(|x|>1)$.

7. Koristeći smenu $x = a\operatorname{ch} t$ naći integrale $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$, $\int \sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}\,dx$.

8. Dat je integral $J_{m,k} = \int x^k \ln^m x\,dx$. Naći vezu između $J_{m,k}$ i $J_{m-1,k}$.

9. Pokazati da je:

1° $\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\dfrac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} + C$;

2° $\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\dfrac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + C$.

* П. Л. Чебышев (1821–1894), ruski matematičar

8. ODREĐENI INTEGRAL

8.1. POJAM ODREĐENOG INTEGRALA

Uočimo segment $[a,b] \subset \mathrm{R}$. Konačan skup tačaka $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, takav da je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, nazvaćemo *podelom* segmenta $[a,b]$. Skup $\mathcal{P}[a,b]$ svih podela segmenta $[a,b]$ uredićemo relacijom $\subset$: ako je $P' \subset P$, kazaćemo da je podela P *finija* od podele P', odnosno da je podela P' *grublja* od podele P. Sa Δx_i označićemo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Pod *parametrom podele* P podrazumevaćemo $\max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i = \lambda(P)$.

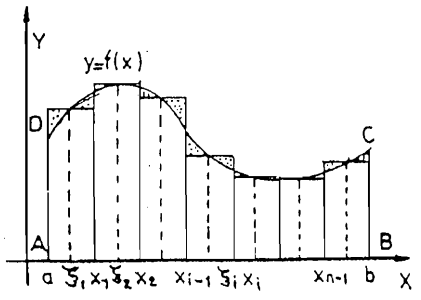
Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, izaberimo po tačku ξ_i. Skup svih izabranih tačaka označimo sa $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Na ovaj način dobija se *podela sa istaknutim tačkama* (P, ξ) segmenta $[a,b]$.

DEFINICIJA 8.1.1

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathrm{R}$ i neka je (P,ξ) podela sa istaknutim tačkama segmenta $[a,b]$. Zbir

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

naziva se *integralnom sumom (integralnim zbirom)* funkcije f za datu podelu (P,ξ).



Sl. 8.1.1

PRIMERI 8.1.1

1° Neka je $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, neprekidna i nenegativna funkcija, sl. 1. Geometrijsku figuru $ABCD$ koju ograničavaju kriva $y = f(x)$ i delovi ose Ox i pravih $x = a$ i $x = b$ nazivaćemo krivolinijskim trapezom. Uočimo jednu podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ s istaknutim tačkama $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Nacrtajmo pravougaonike s osnovama $[x_{i-1}, x_i]$ i visinama $f(\xi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zbir površina ovih pravougaonika dat je integralnom

sumom

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Uočimo delove ravni koji sadrže tačke koje se nalaze u pravougaonicima, a ne nalaze se u krivolinijskom trapezu, kao i delove ravni koji sadrže tačke koje se nalaze u krivolinijskom trapezu, a ne nalaze se u pravougaonicima. Ne ulazeći u ovom trenutku u definiciju površine krivolinijskog trapeza, koju ćemo dati kasnije, a imajući u vidu intuitivan pojam površine, možemo zaključiti da ukupne površine pomenutih delova mogu biti proizvoljno male, a da je površina krivolinijskog trapeza približno jednaka integralnoj sumi $\sigma(f,P,\xi)$.

2° Na pravolinijskom putu $\overrightarrow{AB}$ deluje promenljiva sila $\overrightarrow{F}$ na materijalnu tačku. Pravac sile poklapa se sa pravcem puta. Pretpostavimo da je data zavisnost intenziteta sile od puta, $F=F(s)$. Pokušajmo da izračunamo rad R sile $\overrightarrow{F}$ na putu $\overrightarrow{AB}$. U tom cilju uočimo jednu podelu s istaknutim tačkama (P,ξ) segmenta $[a,b]$ puta (a i b su koordinate tačaka A i B, respektivno), pri čemu je $P=\{s_0,s_1,\dots,s_n\}$. Rad sile $\overrightarrow{F}$ na segmentu $[s_{i-1},s_i]$ iznosi približno $F(\xi_i)(s_i-s_{i-1})$, pa možemo reći da je

$$R\approx\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i,\qquad \Delta s_i=s_i-s_{i-1}.$$

Dakle, rad R sile intenziteta F, konstantnog pravca na pravolinijskom putu, približno je jednak integralnoj sumi $\sigma(F,P,\xi)$. ▲

DEFINICIJA 8.1.2

Za broj I kažemo da je limes (granična vrednost) integralnih suma $\sigma(f,P,\xi)$ funkcije $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ kad $\lambda(P)\to 0$ i pišemo

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I,$$

ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta>0$, tako da za svaku podelu s istaknutim tačkama $(P,\xi)\in\mathcal{P}[a,b]$ važi nejednakost

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon$$

kadgod je $\lambda(P)<\delta$.

Ako $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$ postoji i konačan je, onda se kaže da je funkcija f ***integrabilna u Rimanovom smislu*** na segmentu $[a,b]$. Broj $I=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$ naziva se ***Rimanovim integralom*** funkcije f na segmentu $[a,b]$ i piše se

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Pri tom se a i b nazivaju donjom i gornjom granicom integrala, respektivno; funkcija f naziva se ***podintegralnom funkcijom (integrandom)***, a izraz $f(x)\,dx$ je ***podintegralni izraz***. Promenljiva x je ***integraciona promenljiva***. Ona se može zameniti bilo kojim drugim odgovarajućim simbolom.

Skup svih funkcija, integrabilnih u Rimanovom smislu na segmentu $[a,b]$, označavaćemo sa $\mathcal{R}[a,b]$ i ubuduće ćemo takve funkcije kratko nazivati ***integrabilnim funkcijama***. Rimanov integral, pak, kratko ćemo nazivati ***integralom***.

Primetimo da se integral često naziva i ***određenim integralom***, za razliku od skupa primitivnih funkcija neke funkcije, koji smo nazivali neodređenim integralom.

PRIMERI 8.1.2

1° Posmatrajmo funkciju $f(x)=c$, $a\leqslant x\leqslant b$. Neka je $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ proizvoljna podela sa istaknutim tačkama. Tada je $f(\xi_i)=c$, $i=1,2,\dots,n$, pa je

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} c\Delta x_i=c(b-a).$$

Dakle je

$$\int_a^b c\,dx=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)=c(b-a).$$

Specijalno, za $c=1$ dobijamo $\int_a^b dx=b-a$.

2° Dirihleova funkcija χ definisana je kao

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{za } x\in\mathbf{Q},\\ 0, & \text{za } x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

Neka su a, b proizvoljni realni brojevi, $a<b$. Uzmimo proizvoljnu podelu $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ segmenta $[a,b]$. Izaberimo dva skupa: $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ i $\xi'=\{\xi_1',\xi_2',\dots,\xi_n'\}$ istaknutih tačaka, takva da je $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ racionalan, a $\xi_i'\in[x_{i-1},x_i]$ iracionalan broj, $i=1,2,\dots,n$. Tada je

$$\sigma(\chi,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=b-a,\qquad \sigma(\chi,P,\xi')=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0.$$

Odavde sledi da $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(\chi,P,\xi)$ ne postoji, pa Dirihleova funkcija nije integrabilna na $[a,b]$.

3° Neka je f definisana i neograničena funkcija na segmentu $[a,b]$. Za proizvoljnu podelu $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ postoji segment $[x_{k-1},x_k]$, $k\in\{1,2,\dots,n\}$, tako da je f neograničena na njemu. Na segmentima $[x_{i-1},x_i]$, $i\neq k$, izaberimo tačke ξ_i proizvoljno i sa σ^k označimo zbir

$$\sigma^k=\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Neka je M proizvoljno veliki broj. Zbog neograničenosti funkcije f na $[x_{k-1},x_k]$ postoji $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$, tako da je

$$|f(\xi_k)|\geqslant\frac{|\sigma^k|+M}{\Delta x_k},$$

odakle sledi da je $|f(\xi_k)|\Delta x_k \geqslant |\sigma^k| + M$. Za integralni zbir $\sigma(f,P,\xi)$ sada važi

$$|\sigma(f,P,\xi)| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = |\sigma^k + f(\xi_k)\Delta x_k|$$
$$\geqslant |f(\xi_k)|\Delta x_k - |\sigma^k| \geqslant M.$$

Zaključujemo da ne može postojati konačan limes $\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$. Prema tome, funkcija f nije integrabilna. ▲

Primetimo da iz prethodnog primera sledi

STAV 8.1.1

Potreban uslov da funkcija f bude integrabilna na segmentu $[a,b]$ jeste da f bude ograničena na $[a,b]$. ■

Darbuove sume

U uskoj vezi sa integralnom sumom stoje Darbuove sume. Neka je f funkcija definisana i ograničena na segmentu $[a,b]$ i neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podela tog segmenta. Sa m_i, odnosno m, i M_i, odnosno M, označimo:

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x),$$
$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Sume

$$s = s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \qquad S = S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

nazovimo *donjom* i *gornjom Darbuovom sumom* funkcije f na $[a,b]$, respektivno.

Odnos između integralne i Darbuovih suma daje

STAV 8.1.2

Za integralnu i Darbuove sume ograničene funkcije f na segmentu $[a,b]$ važi:
1° $m(b-a) \leqslant s(f,P) \leqslant \sigma(f,P,\xi) \leqslant S(f,P) \leqslant M(b-a)$;
2° $\inf_\xi \sigma(f,P,\xi) = s(f,P)$; $\sup_\xi \sigma(f,P,\xi) = S(f,P)$.

Dokaz.

1° Za datu podelu (P,ξ) s istaknutim tačkama važi

$$m \leqslant m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \leqslant M, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Množenjem sa Δx_i i sabiranjem dobija se

$$m(b-a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \leqslant M(b-a).$$

2° Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Pokažimo da postoji $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ tako da je $\sigma(f,P,\xi) < s(f,P)+\varepsilon$. U tom cilju primetimo da zbog $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

sledi da postoje tačke $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, takve da je $f(\xi_i) < m_i + \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Množenjem ove nejednakosti sa Δx_i i sabiranjem po i dobija se

$$\sigma(f,P,\xi) < s(f,P) + \varepsilon.$$

Slično se dokazuje i nejednakost $\sigma(f,P,\xi) > S(f,P) - \varepsilon$ za neki izbor tačaka ξ. ■

Pokažimo nekoliko svojstava Darbuovih suma.

STAV 8.1.3

Za Darbuove sume ograničene funkcije f na $[a,b]$ važi:
1° $P \subset P' \implies s(f,P) \leqslant s(f,P') \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P)$.
2° $s(f,P) \leqslant S(f,P')$ *za proizvoljne podele P, P'.*
3° *Postoje konačni* $\sup_P s(f,P)$ *i* $\inf_P S(f,P)$.

Dokaz.

1° Tvrđenje je dovoljno dokazati u slučaju da se P i P' razlikuju za jednu tačku. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i $P' = P \cup \{x'\}$, gde $x_{k-1} < x' < x_k$. Označimo $s^k = \sum_{i\neq k} m_i\Delta x_i$. Tada je

$$s(f,P) = s^k + m_k(x_k - x_{k-1}),$$
$$s(f,P') = s^k + m'_k(x' - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x'),$$

gde je $m'_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x']} f(x)$, $m''_k = \inf_{x\in[x',x_k]} f(x)$. Kako je

$$m_k = \min\{m'_k, m''_k\},$$

to imamo

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - x') + m_k(x' - x_{k-1}) \leqslant m''_k(x_k - x') + m'_k(x' - x_{k-1}),$$

odakle sledi $s(f,P) \leqslant s(f,P')$.

Slično se dokazuje da je $S(f,P) \geqslant S(f,P')$.

2° Za proizvoljne podele P, P' segmenta $[a,b]$ konstruišimo podelu P'' tako da je $P \subset P''$, $P' \subset P''$ (na primer, za P'' možemo uzeti $P'' = P \cup P'$). Tada je

$$s(f,P) \leqslant s(f,P'') \leqslant S(f,P'') \leqslant S(f,P').$$

3° Skupovi $\{s(f,P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ i $\{S(f,P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ su, prema 2°, ograničeni odozgo, odnosno odozdo, pa postoje konačni $\sup_P s(f,P)$ i $\inf_P S(f,P)$. ■

Pomenute u prethodnom stavu brojeve označimo sa

$$\sup_P s(f,P) = \underline{I}, \qquad \inf_P S(f,P) = \overline{I}$$

i nazovimo *donjim*, odnosno *gornjim Darbuovim integralom* funkcije f na $[a,b]$. Jasno je da za svaku podelu P segmenta $[a,b]$ važi

$$s(f,P) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S(f,P). \tag{1}$$

TEOREMA 8.1.1

Neka je f ograničena funkcija na $[a,b]$. Tada su sledeći iskazi međusobno ekvivalentni:

1° *f je integrabilna na $[a,b]$;*

2° $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P})(\lambda(P) < \delta \Rightarrow S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon)$;

3° $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathcal{P})(\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f,P,\xi') - \sigma(f,P,\xi'')| < \varepsilon)$;

4° $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P', P'' \in \mathcal{P})(\lambda(P') < \delta,\ \lambda(P'') < \delta \Rightarrow |\sigma(f,P',\xi') - \sigma(f,P'',\xi'')| < \varepsilon)$.

Pri tom su u 3° i 4° sa ξ' i ξ'' označeni proizvoljni skupovi istaknutih tačaka u odgovarajućim podelama.

Dokaz.

1° $\Longrightarrow$ 4°: Pretpostavimo da postoji $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$|\sigma(f,P',\xi') - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |\sigma(f,P'',\xi'') - I| < \frac{\varepsilon}{2},$$

za $\lambda(P') < \delta$, $\lambda(P'') < \delta$ i proizvoljne skupove istaknutih tačaka ξ' i ξ'' podela P' i P''. Iz poslednjih dveju nejednakosti sledi

$$|\sigma(f,P',\xi') - \sigma(f,P'',\xi'')| < \varepsilon.$$

4° $\Longrightarrow$ 3° sledi neposredno.

3° $\Longrightarrow$ 2°: Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za $P \in \mathcal{P}$, $\lambda(P) < \delta$, važi

$$|\sigma(f,P,\xi') - \sigma(f,P,\xi'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kako je $\sup_{\xi''} \sigma(f,P,\xi') = S(f,P)$ i $\inf_{\xi''} \sigma(f,P,\xi'') = s(f,P)$, to je

$$S(f,P) - s(f,P) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

2° $\Longrightarrow$ 1°: Na osnovu pretpostavke 2° i nejednakosti (1) dobijamo da se gornji i donji integral funkcije f poklapaju: $\underline{I} = \overline{I}$. Označimo njihovu zajedničku vrednost sa I; tada će važiti

$$s(f,P) \leqslant I \leqslant S(f,P).$$

S druge strane, za proizvoljni izbor istaknutih tačaka ξ podele P važi

$$s(f,P) \leqslant \sigma(f,P,\xi) \leqslant S(f,P).$$

Iz poslednjih dveju relacija i pretpostavke 2° sledi da je

$$|\sigma(f,P,\xi) - I| < \varepsilon$$

čim je $P \in \mathcal{P}[a,b]$ takva da je $\lambda(P) < \delta$, što znači da je funkcija f integrabilna i da je $I = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Donji i gornji Darbuov integral definisali smo kao supremum, odnosno infimum, donjih, odnosno gornjih, Darbuovih suma. Sledeća *Darbuova teorema*, koju navodimo bez dokaza (v. zadatak 21), tvrdi da su oni ujedno i limesi odgovarajućih suma.

TEOREMA 8.1.2

Za ograničenu funkciju f na segmentu $[a,b]$ važi

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P), \qquad \overline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P). \quad ■$$

Navedimo jednu posledicu Darbuove teoreme.

POSLEDICA 8.1.1

1° *Ograničena funkcija na segmentu je integrabilna ako i samo ako joj se donji i gornji Darbuov integral poklapaju.*

2° *Ograničena funkcija f je integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji podela P tog segmenta, takva da je $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.* ■

Integrabilnost nekih klasa funkcija

TEOREMA 8.1.3

Neprekidna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna, tj. $C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$.

Dokaz.

Primetimo najpre da iz neprekidnosti funkcije f na segmentu $[a,b]$ sledi njena ravnomerna neprekidnost (teorema 5.4.1). To znači da za dato $\varepsilon > 0$ možemo naći $\delta > 0$ tako da

$$x', x'' \in [a,b],\ |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Izaberimo proizvoljnu podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a,b]$ za koju je $\lambda(P) < \delta$. Ako brojevi M_i i m_i za tu podelu imaju uobičajeno značenje, na osnovu prethodnog važiće $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. No, to znači da je

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Na osnovu teoreme 1 zaključujemo da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$. ■

PRIMERI 8.1.3

1° Neka je $f(x) = x$, $x \in [a,b]$. Funkcija f je neprekidna, dakle i integrabilna, pa prilikom računanja možemo uzeti proizvoljne podele P, takve da $\lambda(P) \to 0$, kao i proizvoljne skupove istaknutih tačaka ξ. Uzmimo $P = \{x_i = a + ih \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$, gde je $h = \frac{b-a}{n}$ i $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada je

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n}(a+ih)h = h\left[an + \frac{n(n+1)}{2}h\right] = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Prelaskom na limes kad $\lambda(P) \to 0$, tj. $n \to \infty$, imamo

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right] = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

2° Izračunajmo $\int_a^b e^x\,dx$.

Stavimo ponovo $x_0 = a$, $x_i = \xi_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tj. ponovo podelimo segment $[a,b]$ na jednake delove i izaberimo tačke ξ_i jednake desnim krajevima podsegmenata. Dobija se

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} he^{a+ih} = he^{a+h}\frac{e^{nh}-1}{e^h-1},$$

odakle je

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}e^{a+h}(e^{b-a}-1) = e^b - e^a.$$

3° $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $0 < a < b$.

Neka je sada P proizvoljna podela segmenta $[a,b]$ tačkama x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, i neka je $\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada je

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{x_{i-1}x_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

pa je

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty}\sigma(f,P,\xi) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \quad \blacktriangle$$

STAV 8.1.4

Monotona funkcija na segmentu je integrabilna.

Dokaz.

Pretpostavimo, određenosti radi, da je f rastuća funkcija na segmentu $[a,b]$ i da je $f \neq \text{const}$. Za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo podelu P segmenta $[a,b]$ tako da je $\lambda(P) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Tada je

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)$$
$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a)) = \varepsilon.$$

Prema teoremi 1, funkcija f je integrabilna. ■

STAV 8.1.5

Neka je f definisana i ograničena funkcija na segmentu $[a,b]$ i neka za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji konačan broj intervala, ukupne dužine manje od ε, koji pokrivaju sve tačke prekida funkcije f. Tada je f integrabilna na $[a,b]$.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = M > m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ i da je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Prekrijmo tačke prekida funkcije f intervalima ukupne dužine manje od $\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$. Skup tačaka segmenta $[a,b]$ koje ne pripadaju pomenutim intervalima jeste unija konačnog broja segmenata; označimo te segmente sa Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ i $\bigcup_{i=1}^{k}\Delta_i = \Delta$.

Kako je f neprekidna funkcija, to je ona ravnomerno neprekidna na svakom Δ_i, pa postoji $\delta_i > 0$ tako da

$$x', x'' \in \Delta_i,\ |x' - x''| < \delta_i \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Stavimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\}$ i konstruišimo podelu P skupa Δ tako da bude $\lambda(P) < \delta$. Dodajmo intervalima skupa $[a,b] \setminus \Delta$ krajnje tačke. Primetimo da te krajnje tačke pripadaju podeli P. Na ovaj način P možemo posmatrati kao podelu segmenta $[a,b]$. Formirajmo razliku (M_i i m_i imaju uobičajeno značenje)

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum{}'(M_i - m_i)\Delta x_i + \sum{}''(M_i - m_i)\Delta x_i,$$

gde se zbir $\sum''$ odnosi na one segmente čije se unutrašnje tačke nalaze u skupu $[a,b] \setminus \Delta$, a zbir $\sum'$ se odnosi na sve ostale segmente.

Prema pretpostavkama je

$$\sum{}'(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum{}'\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\sum{}''(M_i - m_i)\Delta x_i < (M-m)\sum{}''\Delta x_i < (M-m)\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2},$$

pa je $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$, odakle, na osnovu teoreme 1, sledi tvrđenje stava. ■

PRIMER 8.1.4
Pokažimo da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin \frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0, \\ 0, & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

integrabilna na segmentu $[-a, a]$, $a > 0$.

Tačke $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ su tačke prekida prve vrste, dok je $x_0 = 0$ tačka prekida druge vrste funkcije f.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Intervalom $\left(-\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ prekriva se tačka x_0 i beskonačno mnogo tačaka prekida prve vrste. Izvan ovog intervala ima samo konačno mnogo tačaka prekida — pretpostavimo da ih ima p. Prekrijmo ove tačke intervalima dužine $\frac{\varepsilon}{2p}$. Ukupna dužina intervala kojima smo prekrili tačke prekida funkcije f iznosi $\frac{\varepsilon}{2} + p \cdot \frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon$. Dakle, prema stavu 5, integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ postoji. ▲

Navedimo dve posledice stava 5.

POSLEDICA 8.1.2
Neka je funkcija f ograničena i neprekidna na $[a, b]$, sem u konačno mnogo tačaka prekida. Tada je f integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz.
Neka funkcija f ima p tačaka prekida na segmentu $[a, b]$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ prekrijmo svaku tačku prekida x_i intervalom $\left(x_i - \frac{\varepsilon}{2p}, x_i + \frac{\varepsilon}{2p}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Ukupna dužina tih intervala iznosi ε. ■

POSLEDICA 8.1.3
Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$ i razlikuju se samo u konačno mnogo tačaka, onda je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz.
Neka je $I' = \int_a^b f(x)\,dx$, $I'' = \int_a^b g(x)\,dx$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Kako su f i g ograničene, to postoji broj M tako da je $|f(x)| \leqslant M$, $|g(x)| \leqslant M$ za $x \in [a, b]$.

Odredimo broj $\delta_1 > 0$ tako da je

$$|I' - \sigma(f, P, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{i} \quad |I'' - \sigma(g, P, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

za sve $(P, \xi) \in \mathcal{P}$ za koje je $\lambda(P) < \delta_1$. Označimo $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{12kM}\right\}$, gde je k broj tačaka u kojima se razlikuju f i g.

Neka je (P, ξ) proizvoljna podela s istaknutim tačkama segmenta $[a, b]$, $\lambda(P) < \delta$. Tada je

(2)
$$|I' - I''| \leqslant |I' - \sigma(f, P, \xi)| + |\sigma(f, P, \xi) - \sigma(g, P, \xi)| + |\sigma(g, P, \xi) - I''| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

jer je

$$|\sigma(f, P, \xi) - \sigma(g, P, \xi)| = \left|\sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i\right|$$
$$\leqslant \left|\sum\nolimits' [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i\right| + \left|\sum\nolimits'' [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i\right|,$$

gde se zbir $\sum'$ odnosi na segmente $[x_{i-1}, x_i]$ u čijim svim tačkama se funkcije f i g poklapaju, a zbir $\sum''$ se odnosi na one segmente u kojima postoji bar jedna tačka x sa $f(x) \neq g(x)$. Kako je

$$\sum\nolimits' [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i = 0$$

i

$$\left|\sum\nolimits'' [f(\xi_i) - g(\xi_i)]\Delta x_i\right| \leqslant \sum\nolimits'' [|f(\xi_i)| + |g(\xi_i)|]\Delta x_i$$
$$< 2M \cdot 2k \cdot \frac{\varepsilon}{12kM} = \frac{\varepsilon}{3},$$

to je

$$|\sigma(f, P, \xi) - \sigma(g, P, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kako je ε proizvoljno, iz (2) sledi $I' = I''$. ■

Skupovi mere nula

Na kraju ovog odeljka ćemo, bez dokaza, dati jedan kriterijum za integrabilnost funkcija koji se izražava pomoću skupova mere nula. Kriterijum pripada Lebegu. No, najpre da objasnimo pojam skupa mere nula.

DEFINICIJA 8.1.3
Skup $E \subset \mathbf{R}$ *ima meru nula* ako se za proizvoljno $\varepsilon > 0$ može pokriti najviše prebrojivom familijom intervala čija ukupna dužina ne prelazi ε. Da skup E ima meru nula označavaćemo sa $mE = 0$.

PRIMERI 8.1.5
1° Tačka (tj. jednočlan skup) ima meru nula. Naime, tačka se može pokriti intervalom dužine ε za svako $\varepsilon > 0$.

2° Konačan skup tačaka ima meru nula. Zaista, neka je $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ i $\varepsilon > 0$ je proizvoljno. Skup intervala oblika $\left(a_i - \frac{\varepsilon}{2p}, a_i + \frac{\varepsilon}{2p}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, pokriva skup E i ukupna dužina tih intervala je ε.

3° Prebrojiv skup $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ takođe ima meru nula. Za dato $\varepsilon > 0$ formirajmo niz intervala dužina $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$, kojima redom pokrijmo tačke $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

4° Skup $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ je prebrojiv, dakle je $m\mathbf{Q} = 0$.

5° Dokažimo da segment $[a, b]$, $a < b$, nema meru nula. U tom cilju dokazaćemo da proizvoljna, najviše prebrojiva, familija intervala koja pokriva $[a, b]$ ima ukupnu dužinu ne manju od $b - a$.

Primetimo najpre da za proizvoljnu familiju intervala koja pokriva segment $[a, b]$ postoji konačna podfamilija koja pokriva taj segment (lema 2.7.3). Indukcijom pokažimo da ukupna dužina takve konačne familije nije manja od $b - a$.

Ako jedan interval pokriva $[a, b]$, tvrđenje je očito. Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za n intervala.

Neka $n + 1$ interval pokriva $[a, b]$. Jedan od tih intervala pokriva tačku a — neka je to interval (c_1, c_2). Ako je $b < c_2$, onda je $c_1 < a < b < c_2$, tj. $b - a < c_2 - c_1$ i tvrđenje je dokazano. Ako je, pak, $c_2 \leqslant b$, onda je segment $[c_2, b]$ pokriven sa najviše n intervala date familije; na osnovu induktivne pretpostavke, ukupna dužina ovih intervala je ne manja od $b - c_2$. Tada je

$$b - a = (b - c_2) + (c_2 - a) < (b - c_2) + (c_2 - c_1),$$

tj. zbir dužina intervala familije koja pokriva $[a, b]$ veći je od $b - a$. ▲

TEOREMA 8.1.4

Ograničena funkcija na nekom segmentu integrabilna je ako i samo ako je skup njenih tačaka prekida mere nula. ■

PRIMERI 8.1.6

1° Teorema 3, stavovi 4 i 5, kao i posledica 2, mogu se dobiti primenom teoreme 4. Zaista, skupovi tačaka prekida funkcija opisanih u tim tvrđenjima imaju meru nula.

2° Dirihleova funkcija χ, za koju smo u primeru 1.2° videli da nije integrabilna na proizvoljnom segmentu $[a, b]$, $a < b$, ima prekid u svakoj tački tog segmenta. Prema tome, skup tačaka prekida ove funkcije na segmentu $[a, b]$ nema meru nula.

3° Rimanova funkcija $\mathcal{R}$ (v. zadatak 5.1(e)), definisana kao

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ako } x \in \mathbf{Q} \text{ i } x = \frac{m}{n} \text{ se ne može skratiti,} \\ 0, & \text{ako je } x \notin \mathbf{Q} \text{ ili } x = 0, \end{cases}$$

neprekidna je svuda, osim na skupu $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Kako je taj skup mere nula, funkcija $\mathcal{R}$ je integrabilna na svakom segmentu $[a, b]$. ▲

8.2. SVOJSTVA INTEGRALA

Linearnost integrala

TEOREMA 8.2.1

Neka $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ i $\alpha \in \mathbf{R}$. Tada $f \pm g \in \mathcal{R}[a, b]$ i $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$. Pri tom važe jednakosti

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Dokaz.

Integralnu sumu $\sigma(f \pm g, P, \xi)$ integrala $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx$ napisaćemo u obliku

$$\begin{aligned} \sigma(f \pm g, P, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \sigma(f, P, \xi) \pm \sigma(g, P, \xi). \end{aligned}$$

Kako je $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) = \int_a^b f(x)\,dx$, $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(g, P, \xi) = \int_a^b g(x)\,dx$, to postoji i $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f \pm g, P, \xi) = \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx$ i važi (1).

Slično, napišimo

$$\sigma(\alpha f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sigma(f, P, \xi).$$

Prelaskom na limes kad $\lambda(P) \to 0$ vidi se da postoji $\int_a^b \alpha f(x)\,dx$ i da važi (2). ■

POSLEDICA 8.2.1

Ako $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ i α, β su realni brojevi, onda $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a, b]$. Pri tom važi jednakost

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \quad ■$$

TEOREMA 8.2.2

Neka $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. Tada:

1° $fg \in \mathcal{R}[a, b]$;

2° $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$;

3° $\frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$, *uz uslov* $|f(x)| \geqslant \alpha > 0$ *za* $x \in [a, b]$;

4° $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$ *ako* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Dokaz.

1° Funkcije f i g su integrabilne, dakle i ograničene na $[a,b]$, pa postoji $K \in \mathbb{R}$, tako da je $|f(x)| \leqslant K$, $|g(x)| \leqslant K$ za $x \in [a,b]$. Iz integrabilnosti funkcije f sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_1 > 0$ tako da imamo

$$(P,\xi') \in \mathcal{P},\ (P,\xi'') \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta_1 \implies \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Naime, kada bismo u izrazu $\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i$ uzeli u obzir da je $\sup_{\xi_i' \in [x_{i-1},x_i]} f(\xi_i') = M_i$ i $\inf_{\xi_i'' \in [x_{i-1},x_i]} f(\xi_i'') = m_i$, imali bismo

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i \leqslant S(f,P) - s(f,P),$$

a prema teoremi 1.1 postoji $\delta_1 > 0$ tako da

$$P \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta_1 \implies S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Slično se dobija da postoji $\delta_2 > 0$ tako da

$$(P,\xi') \in \mathcal{P},\ (P,\xi'') \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta_2 \implies \sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i') - g(\xi_i'')|\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Označimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Za (P,ξ'), $(P,\xi'') \in \mathcal{P}$ i $\lambda(P) < \delta$ je

$$\begin{aligned}
|\sigma(fg,P,\xi') - \sigma(fg,P,\xi'')| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')g(\xi_i')\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')g(\xi_i'')\Delta x_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i')g(\xi_i') - f(\xi_i'')g(\xi_i'')|\Delta x_i \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i') - f(\xi_i'')| \cdot |g(\xi_i')|\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} |g(\xi_i') - g(\xi_i'')| \cdot |f(\xi_i'')|\Delta x_i \\
&< K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Prema teoremi 1.1 funkcija fg je integrabilna na $[a,b]$.

2° Neka je $\varepsilon > 0$. Iz integrabilnosti funkcije f, slično kao pod 1°, sledi da postoji $\delta > 0$ tako da

$$(P,\xi') \in \mathcal{P},\ (P,\xi'') \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i < \varepsilon.$$

Prema ovome, za proizvoljne izbore tačaka ξ', ξ'' u podeli P imamo

$$\begin{aligned}
|\sigma(|f|,P,\xi') - \sigma(|f|,P,\xi'')| &= \left|\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i')|\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i'')|\Delta x_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i < \varepsilon,
\end{aligned}$$

odakle na osnovu teoreme 1.1 sledi tvrđenje.

3° Iz $f \in \mathcal{R}[a,b]$ sledi da za $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i < \alpha^2\varepsilon, \quad \text{za } \lambda(P) < \delta.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\left|\sigma\left(\frac{1}{f},P,\xi'\right) - \sigma\left(\frac{1}{f},P,\xi''\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f(\xi_i')} - \frac{1}{f(\xi_i'')}\right)\Delta x_i\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i}{|f(\xi_i')f(\xi_i'')|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(\xi_i') - f(\xi_i'')|\Delta x_i}{\alpha^2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

4° Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$P \in \mathcal{P}[a,b],\ \lambda(P) < \delta \implies S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Dodajmo podeli P tačke α i β. Time se dobija nova podela P'. Očito je

$$S(f,P') - s(f,P') < \varepsilon.$$

Sa S^* i s^* označimo zbirove

$$S^* = \sum_{\Delta x_i \subset [\alpha,\beta]} M_i\Delta x_i, \quad \text{odnosno} \quad s^* = \sum_{\Delta x_i \subset [\alpha,\beta]} m_i\Delta x_i.$$

Nejednakost $S^* - s^* < \varepsilon$ je očigledna. ■

Aditivnost integrala

STAV 8.2.1

Ako $f \in \mathcal{R}[a,c]$ i $a < b < c$, onda $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $f \in \mathcal{R}[b,c]$ i pri tom važi jednakost

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Dokaz.

Iz teoreme 2.4° sledi integrabilnost funkcije f na $[a,b]$ i $[b,c]$. Zbog $f \in \mathcal{R}[a,c]$, prilikom računanja $\int_a^c f(x)\,dx$ možemo da biramo proizvoljne podele P tog segmenta. Neka je P jedna takva podela koja sadrži tačku b, i neka je ξ proizvoljan skup istaknutih tačaka u njoj. Neka je zatim $P \cap [a,b] = P'$, $P \cap [b,c] = P''$, $\xi \cap [a,b] = \xi'$, $\xi \cap [b,c] = \xi''$. Tada su (P',ξ'), odnosno (P'',ξ''), podele s istaknutim tačkama segmenta $[a,b]$, odnosno $[b,c]$, takve da je

$$\sigma(f,P,\xi) = \sigma(f,P',\xi') + \sigma(f,P'',\xi'')$$

i $\lambda(P') \leqslant \lambda(P)$, $\lambda(P'') \leqslant \lambda(P)$. Prelaskom na limes kad $\lambda(P) \to 0$ (a samim tim i $\lambda(P') \to 0$, $\lambda(P'') \to 0$) dobija se tvrđenje stava. ■

Pri definiciji integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ pretpostavljali smo da je $a < b$. Sada ćemo dati nove definicije koje će omogućiti da govorimo o integralima kod kojih je donja granica veća ili jednaka donjoj.

DEFINICIJA 8.2.1

1° Ako je funkcija f definisana u tački a, onda je $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2° Ako je $a < b$ i $\int_a^b f(x)\,dx$ postoji, onda je

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Primetimo da jednakost $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)$ sugeriše deo 2° ove definicije.

STAV 8.2.2

Neka tačke $a, b, c \in \mathbf{R}$ predstavljaju krajeve triju segmenata. Ako je funkcija f integrabilna na najvećem od tih segmenata, onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi jednakost

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Dokaz.

Tvrđenje o integrabilnosti funkcije sledi iz teoreme 2.4°. Za dokaz jednakosti pretpostavimo da je, na primer, $a < c < b$. Na osnovu stava 1 je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

tj.

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Uzevši u obzir definiciju 1.2°, imamo

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Slično se postupa i u ostalim slučajevima. ■

Monotonost i procena integrala

STAV 8.2.3

Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $a < b$ i $f(x) \geqslant 0$ za $x \in [a,b]$, onda je $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Dokaz.

Kako je integralna suma $\sigma(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ za svako $(P,\xi) \in \mathcal{P}[a,b]$ nenegativna, to je takva i njena granična vrednost. ■

POSLEDICA 8.2.2

Ako je $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in [a,b]$, $a < b$ i $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, onda je $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$. ■

STAV 8.2.4

Neka je $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna i nenegativna funkcija, $a < b$. Ako postoji tačka $c \in [a,b]$ tako da je $f(c) > 0$, onda je $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $c \in (a,b)$. Iz neprekidnosti funkcije f u tački c sledi da postoji $\delta > 0$ tako da je $\delta \leqslant \min\{c-a, b-c\}$ i da važi

$$x \in [a,b],\ |x-c| < \delta \implies f(x) > \frac{1}{2}f(c).$$

Odavde je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$
$$> \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\,dx = \frac{f(c)}{2} \cdot 2\delta > 0.$$

Stav se slično dokazuje i u slučaju $c = a$ ili $c = b$. ■

STAV 8.2.5

Ako je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $a < b$, onda važi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Dokaz.

Iz $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, na osnovu posledice 2, sledi

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

odakle je

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Označimo $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = M^*$. Tada je $|f(x)| \leqslant M^*$, $x \in [a,b]$, odakle je

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b M^*\,dx = M^*(b-a). \quad ■$$

Prva teorema o srednjoj vrednosti

TEOREMA 8.2.3

Neka f, $g \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ i $g(x) \geqslant 0$ $(g(x) \leqslant 0)$ za $x \in [a,b]$. Tada postoji $\mu \in [m,M]$, tako da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

Ako je još $f \in C[a,b]$, onda postoji $c \in (a,b)$, tako da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{4}$$

Dokaz.

Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti da je funkcija g nenegativna. Tada iz $m \leqslant f(x) \leqslant M$ sledi

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \qquad x \in [a,b].$$

Integrisanjem se dobija

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ako je $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, onda je $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ i relacija (3) važi. Ako je $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, onda je

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M,$$

pa se za broj μ u relaciji (3) može uzeti $\mu = \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Big/ \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$.

U slučaju neprekidnosti funkcije f, prema teoremi 5.3.1, postoji $c \in (a,b)$, tako da je $f(c) = \mu$, čime je dokazana jednakost (4). ■

Stavljajući u teoremi 3 $g(x) \equiv 1$, dobija se

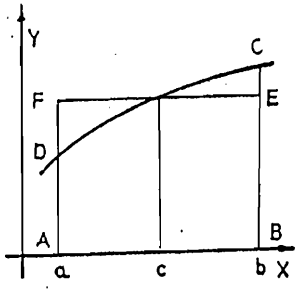
POSLEDICA 8.2.3

Neka je $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Tada postoji $\mu \in [m,M]$ tako da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \tag{5}$$

Ako je $f \in C[a,b]$, onda postoji $c \in (a,b)$ tako da važi jednakost

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{6}$$ ■



Sl. 8.2.1

Negde se jednakost (6) naziva prvom teoremom o srednjoj vrednosti integrala. Ta jednakost ima jednostavno geometrijsko tumačenje. Na slici 1 prikazan je grafik funkcije $y = f(x)$ i prava $y = f(c)$, $c \in (a,b)$. Jednakost (6) govori da su površine krivolinijskog trapeza $ABCD$ i pravougaonika $ABEF$ jednake.

8.3. VEZA IZMEĐU ODREĐENOG INTEGRALA I IZVODA

Posmatrajmo funkciju f, integrabilnu na segmentu $[a,b]$. Kada x uzima vrednosti iz segmenta $[a,b]$, onda je

$$\varphi(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

funkcija, definisana na $[a,b]$. Ova funkcija često se naziva *integralom sa promenljivom gornjom granicom*.

STAV 8.3.1

Neka je $f \in \mathcal{R}[a,b]$ i $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$. Tada:

1° funkcija φ je neprekidna na segmentu $[a,b]$;

2° ako je funkcija f neprekidna u nekoj tački $x \in [a,b]$, onda je φ diferencijabilna u toj tački. Pri tom važi

$$\varphi'(x) = f(x).$$

Dokaz.

1° Neka x, $x+h \in [a,b]$. Ako je $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = M$, prema stavu 2.5 je

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leqslant M|h| \to 0 \quad \text{za } h \to 0,$$

pa je funkcija φ neprekidna u tački x.

2° Nađimo izvod $\varphi'(x)$ funkcije φ u tački x u kojoj je funkcija f neprekidna. Najpre,

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Označimo $m_h = \inf_{t\in[x,x+h]} f(t)$ i $M_h = \sup_{t\in[x,x+h]} f(t)$ (jednostavnosti radi, ovde je sa $[x,x+h]$ označen segment s krajnjim tačkama x i $x+h$ za $h > 0$ ili $h < 0$). Prema posledici 2.3 je

$$m_h \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant M_h.$$

Ako je f neprekidna zdesna, odnosno sleva, u tački x, onda $m_h \to f(x)$, $M_h \to f(x)$ za $h \to +0$, odnosno $h \to -0$, pa je

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x), \quad \text{odnosno} \quad \lim_{h\to-0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x).$$

Ako je funkcija f neprekidna u tački x, onda je

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x),$$

tj.

$$\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = f(x). \quad \blacksquare$$

Nekad se ovaj stav kratko formuliše ovako: izvod integrala po gornjoj granici jednak je vrednosti podintegralne funkcije u toj gornjoj granici.

Posmatrajmo sada funkciju $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, neprekidnu u tački $x \in [a,b]$, i funkciju

$$\psi(x) = \int_x^b f(t)\,dt.$$

Očito važi

$$\psi'(x) = \left(-\int_b^x f(t)\,dt\right)' = -f(x).$$

Neposredno iz stava sledi

TEOREMA 8.3.1
Ako je $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija, onda je

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b],$$

njena primitivna funkcija. ■

Njutn-Lajbnicova formula

TEOREMA 8.3.2
Neka je $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija i ψ proizvoljna njena primitivna funkcija. Tada važi jednakost

$$\int_a^b f(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a). \tag{1}$$

Dokaz.
Funkcija $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ je, prema prethodnoj teoremi, primitivna funkcija funkcije $f(x)$. Prema stavu 7.1.1 možemo pisati $\varphi(x) = \psi(x) + C$, $x \in [a,b]$, gde je C konstanta. Stavimo li u poslednjoj jednakosti $x = a$, dobijamo $\varphi(a) = \psi(a) + C$, odnosno $C = -\psi(a)$, jer je $\varphi(a) = 0$. Za $x = b$ imamo $\varphi(b) = \psi(b) - \psi(a)$ ili $\int_a^b f(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a)$. ■

Jednakost (1) naziva se *Njutn*-Lajbnicovom formulom*. Ona se često piše i u obliku

$$\int_a^b f(x)\,dx = \psi(x)\Big|_a^b = [\psi(x)]_a^b.$$

Ta formula važi u slučaju $a < b$, kao i u slučaju $b < a$. Naime, promenom mesta a i b menja se istovremeno znak obe strane jednakosti (1).

* I. Newton (1642–1727), engleski matematičar i fizičar

PRIMER 8.3.1

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1.$$

$$\int_\alpha^\beta a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}\Big|_\alpha^\beta = \frac{a^\beta - a^\alpha}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1. \quad \blacktriangle$$

Pre daljeg izlaganja svojstava integrala pomenućemo nekoliko pojmova.

DEFINICIJA 8.3.1
Funkcija $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ je *glatka* na $[a,b]$, $a < b$, ako ima neprekidan izvod na $[a,b]$; podrazumeva se da se u tački a govori o desnom, a u tački b o levom izvodu.

Prema tome, funkcija f je glatka na $[a,b]$ ako je neprekidna na $[a,b]$ i ima neprekidan izvod u (a,b), takav da postoje $f'(a+0)$ i $f'(b-0)$. Familiju svih glatkih funkcija na $[a,b]$ označavaćemo sa $C^1[a,b]$.

Posmatrajmo sada deo-po-deo neprekidnu funkciju f na segmentu $[a,b]$. Neka je ona neprekidna svuda, sem eventualno u tačkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$, pri čemu je $x_0 = a$, $x_n = b$. Za svaki segment $[x_{i-1}, x_i]$ možemo konstruisati funkciju $f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}$, tako da je

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ f(x_{i-1}+0), & \text{za } x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0), & \text{za } x = x_i. \end{cases}$$

Svaka od tih funkcija je neprekidna. Ako svaka od funkcija f_i ima neprekidan izvod, kazaćemo da je f deo-po-deo glatka. Dakle, deo-po-deo glatka funkcija f je neprekidna, kao i njen izvod u svakom od intervala (x_{i-1}, x_i) i postoje

$$f'(x_{i-1}+0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x_{i-1}+h) - f(x_{i-1}+0)}{h},$$

$$f'(x_i - 0) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x_i - h) - f(x_i - 0)}{h}.$$

PRIMER 8.3.2
Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} |1 - x^2|, & \text{za } -1 \leqslant x < 2, \\ 2 - x, & \text{za } 2 \leqslant x < 3, \\ 0, & \text{za } x = 3. \end{cases}$$

Označimo $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. U intervalima $(-1,2)$ i $(2,3)$ f je neprekidna. Postoji neprekidan izvod $f'(x)$ u intervalima $(-1,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, kao i $f'(-1+0)$, $f'(1-0)$, $f'(1+0)$, $f'(2-0)$, $f'(2+0)$, $f'(3-0)$. Dakle, f je deo-po-deo glatka. ▲

STAV 8.3.2
Za neprekidnu, deo-po-deo glatku funkciju φ na segmentu $[a,b]$ važi jednakost

$$\int_a^b \varphi'(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Dokaz.
Neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) sve tačke prekida funkcije $\varphi'(x)$. Uočimo proizvoljan segment $[x_{i-1}, x_i]$. Prema formuli (1) je

$$\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'(x)\,dx,$$

gde smo funkciji φ' u tačkama x_{i-1}, x_i dodelili vrednosti $\varphi'(x_{i-1}+0)$ i $\varphi'(x_i-0)$, respektivno. Sabirajući izraze $\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})$ dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})] = \varphi(b) - \varphi(a).$$

S druge strane, definišimo funkciju $\psi\colon [a,b] \to \mathrm{R}$, gde je $\psi(x) = \varphi'(x)$ za $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots n$, i $\psi(x_i)$ je proizvoljan realan broj. Očito je

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'(x)\,dx,$$

prema posledici 1.3. U tom smislu možemo pisati

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi'(x)\,dx = \int_a^b \varphi'(x)\,dx.$$

Kako je svejedno koje vrednosti se dodeljuju funkciji ψ u tačkama x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, u integralu $\int_a^b \varphi'(x)\,dx$ možemo funkciju φ' u tačkama x_i ostaviti nedefinisanu. ■

8.4. PARCIJALNA INTEGRACIJA. SMENA PROMENLJIVE

Parcijalna integracija

TEOREMA 8.4.1
Neka funkcije $u(x)$ i $v(x)$ imaju neprekidne izvode na segmentu $[a,b]$. Tada važi jednakost

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \tag{1}$$

Dokaz.
Za proizvod funkcija $u(x)v(x)$ važi jednakost

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Prema Njutn-Lajbnicovoj formuli je

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,dx = [u(x)v(x)]_a^b,$$

ili

$$\int_a^b v(x)\,du(x) + \int_a^b u(x)\,dv(x) = [u(x)v(x)]_a^b,$$

odakle se dobija (1). ■
Formula (1) se kraće piše u obliku

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

PRIMERI 8.4.1
1° Za integral $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, stavljajući $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x\,dx$, $n \geqslant 2$, imaćemo $du = (n-1)\sin^{n-2} x\,dx$, $v = -\cos x$, pa formula (1) daje

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Odavde je

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Uzimajući u obzir da je $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$, dobija se

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$
$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

2° Neka su funkcija f, kao i njenih prvih $n+1$ izvoda, neprekidni u nekoj okolini tačke a i neka je x tačka iz te okoline. Primenjujući formulu (1) na desnu stranu jednakosti

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt,$$

dobija se

$$f(x)-f(a)=-\int_a^x f'(t)\,d(x-t)=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$
$$=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\,d(x-t)^2$$
$$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)\,d(x-t)^3$$
$$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n+R_n(x),$$

gde je

$$R_n(x)=-\frac{1}{(n+1)!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,d(x-t)^{n+1}=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Uzimajući u obzir da je $\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$ Tejlorov polinom funkcije f u tački a, izraz $R_n(x)$ nazivaćemo *ostatkom u integralnom obliku.* ▲

Druga teorema o srednjoj vrednosti

Koristeći formulu parcijalne integracije, dokazaćemo još neka svojstva integrala.

STAV 8.4.1

Neka je f neprekidna, a g rastuća, nenegativna i glatka funkcija na segmentu $[a,b]$. Tada postoji $\xi\in[a,b]$ tako da je

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Dokaz.

Posmatrajmo funkciju $\varphi(x)=\int_x^b f(t)\,dt$, $x\in[a,b]$. Ona je neprekidna. Označimo

$$m=\min_{x\in[a,b]}\varphi(x),\quad M=\max_{x\in[a,b]}\varphi(x).$$

Za izvod funkcije φ dobijamo $\varphi'(x)=-f(x)$, pa primena formule (1) daje

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx=-\int_a^b g(x)\,d\varphi(x)=-g(x)\varphi(x)\Big|_a^b+\int_a^b\varphi(x)g'(x)\,dx$$
$$=g(a)\varphi(a)+\int_a^b\varphi(x)g'(x)\,dx.$$

Kako je $g'(x)\geqslant 0$, $g(a)\geqslant 0$, to je

$$g(a)\varphi(a)+\int_a^b\varphi(x)g'(x)\,dx\leqslant Mg(a)+M\int_a^b g'(x)\,dx$$
$$=Mg(a)+M[g(b)-g(a)]=Mg(b).$$

Slično se dobija

$$g(a)\varphi(a)+\int_a^b\varphi(x)g'(x)\,dx\geqslant mg(b).$$

Na osnovu gornjih nejednakosti imamo

$$mg(b)\leqslant\int_a^b g(x)f(x)\,dx\leqslant Mg(b).$$

Iz ove dvostruke nejednakosti se zaključuje: (a) ako je $g(b)=0$, onda je $g(x)\equiv 0$, jer g raste, pa jednakost (2) važi; (b) ako je $g(b)>0$, onda deljenjem sa $g(b)$ dobijamo

$$m\leqslant\frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx\leqslant M.$$

Kako je φ neprekidna funkcija, to postoji $\xi\in[a,b]$, tako da je

$$\frac{1}{g(b)}\int_a^b g(x)f(x)\,dx=\varphi(\xi),$$

odakle se dobija jednakost (2). ■

Sledeća teorema se obično naziva *drugom teoremom o srednjoj vrednosti integrala.*

TEOREMA 8.4.2

Neka je f neprekidna, a g monotona i glatka funkcija na segmentu $[a,b]$. Tada postoji $\xi\in[a,b]$, tako da važi jednakost

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Dokaz.

Određenosti radi, pretpostavimo da g raste na $[a,b]$. Definišimo funkciju ψ sa $\psi(x)=g(x)-g(a)$. Funkcija ψ je nenegativna i glatka. Na funkcije f i ψ primenimo jednakost (2):

$$\int_a^b\psi(x)f(x)\,dx=\psi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Stavljajući $\psi(x)=g(x)-g(a)$ dobija se

$$\int_a^b g(x)f(x)\,dx=g(a)\int_a^b f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx-g(a)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Iz ove jednakosti, uzimajući u obzir da je

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_\xi^b f(x)\,dx=\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

dobija se jednakost (3). ■

Formule (2) i (3) nazivaju se često *Boneovim* formulama*. Napomenimo da teorema 2 važi i pod nešto slabijim pretpostavkama. Naime, može se dokazati da tvrđenje teoreme 2 važi ako je g monotona, a f integrabilna funkcija na segmentu $[a, b]$ (v. npr. [22]).

Smena promenljive kod određenog integrala

Navešćemo sada formulu koja služi za smenu promenljive kod određenog integrala.

Teorema 8.4.3

Neka je funkcija $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna, a funkcija $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ima neprekidan izvod i pri tom je $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Tada važi jednakost:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{4}$$

Dokaz:

Neka je $\psi(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, $x \in [a, b]$. Za složenu funkciju $(\psi \circ \varphi)(t) = \psi(\varphi(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, imamo

$$\frac{d}{dt}\psi(\varphi(t)) = \psi'_\varphi \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Dakle, za $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, funkcija $\psi(\varphi(t))$ je primitivna funkcija od $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, pa je, prema teoremi 3.2,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \psi(\varphi(\beta)) - \psi(\varphi(\alpha)) = \psi(b) - \psi(a).$$

S druge strane, iz $\psi'(x) = f(x)$ sledi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \psi(b) - \psi(a). \quad \blacktriangle$$

U navedenoj teoremi formula smene promenljive (4) izvedena je pod pretpostavkom da je funkcija f neprekidna, što je i najčešći slučaj u primenama. Pomenimo, međutim, da u slučaju da je funkcija φ strogo monotona, ta formula važi i pod slabijom pretpostavkom da je f samo integrabilna na $[a, b]$ (v. npr. [22]).

Primeri 8.4.2

1° Izračunajmo $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. Smenom $x = a\sin t$ imamo $dx = a\cos t\,dt$, pa je

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2\pi}{4}.$$

* P. O. Bonnet (1819–1892), francuski matematičar

2° Integral $I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$ izračunaćemo uvođenjem smene $x = \pi - t$, što daje

$$I = -\int_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt - \int_0^\pi \frac{t\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt.$$

Odavde je

$$2I = \pi \int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt,$$

tj.

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}\,dt = -\int_0^\pi \frac{d(\cos t)}{1 + \cos^2 t} = -\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

3° Pokažimo da, ako je $f \in \mathcal{R}[-a, a]$ parna funkcija, onda važi jednakost

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Zaista, napišimo $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$. Smenom $x = -t$ dobijamo

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt,$$

pa je

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

4° Neka je $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidna i periodična funkcija sa periodom ω. Pokažimo da važi jednakost

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_0^\omega f(x)\,dx.$$

Polazeći od jednakosti

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_a^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^{a+\omega} f(x)\,dx,$$

smenom $x - \omega = t$ u drugom integralu s desne strane, dobijamo

$$\int_\omega^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+\omega)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt,$$

pa je

$$\int_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_a^\omega f(x)\,dx + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^\omega f(x)\,dx. \quad \blacktriangle$$

8.5. PRIMENE INTEGRALA

Određeni integral ima veoma mnogo primena u nizu naučnih oblasti: fizici, hemiji, biologiji, kao i u društvenim naukama. Posebno, određeni integral se koristi u matematičkim disciplinama. Ovde ćemo videti neke od tih primena u geometriji i fizici.

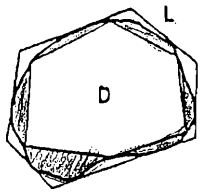
Površine ravnih likova

Neka je D deo ravni ograničen zatvorenom prostom krivom L (tačnu definiciju tog pojma daćemo nešto kasnije — v. str. 207). Definisaćemo površinu ravne geometrijske figure D, sl. 1.

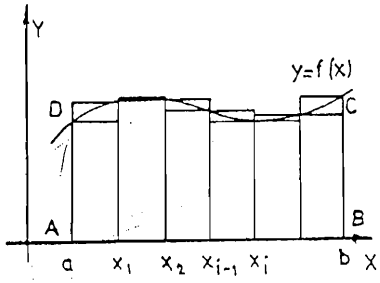
Najpre definišimo upisani mnogougao u figuru D kao mnogougao čije sve tačke se nalaze u D. Mnogougao koji sadrži sve tačke figure D naziva se opisani mnogougao oko figure D.

Označimo sa $\{W_i\}$ skup površina upisanih, a sa $\{W_e\}$ skup površina opisanih mnogouglova figure D. Očito je da je skup $\{W_i\}$ ograničen odozgo, a skup $\{W_e\}$ ograničen odozdo, pa postoje konačni $\sup\{W_i\} = \underline{P}$ i $\inf\{W_e\} = \overline{P}$. Lako se pokazuje da je $\underline{P} \leqslant \overline{P}$.

DEFINICIJA 8.5.1
Kažemo da je figura D *merljiva* ako je $\underline{P} = \overline{P}$. Pri tom zajedničku vrednost $\underline{P}$ i $\overline{P}$ nazivamo *površinom* figure D i označavamo sa $P(D)$.



Sl. 8.5.1



Sl. 8.5.2

STAV 8.5.1
Ravna figura D je merljiva ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoje opisan i upisan mnogougao figure D, tako da je razlika $W_e - W_i$ njihovih površina manja od ε.

Dokaz.
Neka figura D ima površinu P. Kako je $\underline{P} = \overline{P} = P$, to za $\varepsilon > 0$ postoji upisan mnogougao čija površina W_i zadovoljava uslov $P - W_i < \varepsilon/2$ i postoji opisan mnogougao čija površina W_e zadovoljava uslov $W_e - P < \varepsilon/2$. Odavde sledi $W_e - W_i = W_e - P + P - W_i < \varepsilon$.

Ako je uslov stava ispunjen, onda za $\varepsilon > 0$ postoje upisan i opisan mnogougao figure D čije površine W_i i W_e zadovoljavaju uslov $W_e - W_i < \varepsilon$. Kako je $\underline{P} \geqslant W_i$ i $\overline{P} \leqslant W_e$, to je i $\overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$. Broj ε je proizvoljan, pa je $\overline{P} = \underline{P}$. ■

Posmatrajmo krivu $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, gde je f neprekidna nenegativna funkcija, sl. 2. Figura $ABCD$ u ravni Oxy, ograničena delovima x-ose, pravih $x = a$ i $x = b$ i datom krivom je krivolinijski trapez. Nadimo površinu tog trapeza.

Neka je $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podela segmenta $[a,b]$, $a = x_0$, $b = x_n$. Ako označimo

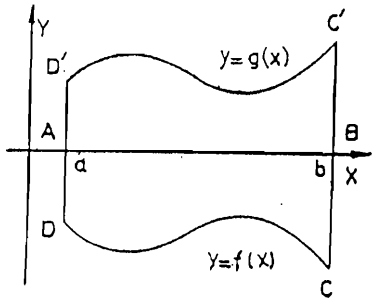
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

onda će donja Darbuova suma $s(f,T)$ biti jednaka zbiru površina upisanih, a gornja Darbuova suma $S(f,T)$ zbiru površina opisanih pravougaonika prikazanih na sl. 2. Kako je f neprekidna funkcija, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podela T tako da je $S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon$, pa je krivolinijski trapez merljiva figura, a površina P mu je jednaka

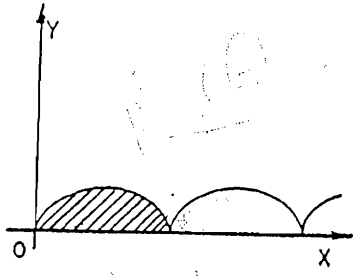
$$P = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Neka je $f(x)$, $x \in [a,b]$, neprekidna funkcija i $f(x) \leqslant 0$. Da bismo našli površinu krivolinijskog trapeza $ABCD$, sl. 3, uočimo funkciju $g(x) = -f(x)$ i nacrtajmo krivu $y = g(x)$, $x \in [a,b]$. Površina P_{ABCD} jednaka je površini $P_{ABC'D'}$ krivolinijskog trapeza $ABC'D'$. Prema tome je

$$P_{ABCD} = \int_a^b g(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$



Sl. 8.5.3



Sl. 8.5.4

PRIMERI 8.5.1
1° Cikloida (v. zadatak 4.24) je data jednačinama

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Nadimo površinu P između x-ose i jednog svoda cikloide (za $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$), sl. 4.

Prema jednakosti (1), površina P je data sa

$$P = \int_0^{2r\pi} y\,dx = 2\int_0^{r\pi} y\,dx,$$

zbog simetričnosti površi čiju površinu tražimo, gde je $y = f(x)$ jednačina cikloide. Stavimo ovde $x = r(t-\sin t)$, $dx = r(1-\cos t)\,dt$, $y = r(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Tada je

$$P = 2\int_0^{\pi} r^2(1-\cos t)^2\,dt = 3\pi r^2.$$

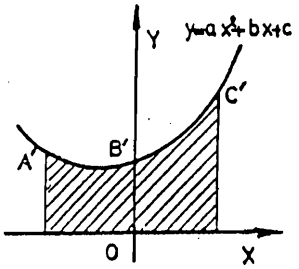
2° Neka su $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, pri čemu je $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h > 0$, tri tačke u ravni $\mathbf{R}^2$, kroz koje prolazi parabola čija je jednačina $y = ax^2 + bx + c$. Dokažimo da površina P krivolinijskog trapeza koji je ograničen x-osom, pravim $x = x_0$, $x = x_2$ i lukom parabole, ima vrednost

$$P = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

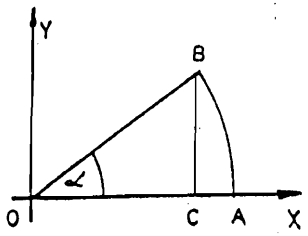
U tom cilju, bez ograničenja opštosti, možemo posmatrati tačke $A'(-h, y_0)$, $B'(0, y_1)$, $C'(h, y_2)$, sl. 5. Za površinu P, prema (1), imamo

$$P = \int_{-h}^{h}(ax^2 + bx + c)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2ah^2 + ch).$$

S druge strane je $y_0 = ah^2 - bh + c$, $4y_1 = 4c$, $y_2 = ah^2 + bh + c$, pa je zaista $P = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.



Sl. 8.5.5



Sl. 8.5.6

3° U koordinatnom sistemu Oxy dat je kružni isečak centralnog ugla α i poluprečnika r, sl. 6. Nađimo njegovu površinu P.

Najpre isečak OAB podelimo pravom $x = r\cos\alpha$ na dva dela: trougao OCB i figuru CAB. Površina P_1 trougla OCB jednaka je $\frac{1}{2}r^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}r^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Prema Njutn-Lajbnicovoj formuli, površina P_2 figure CAB iznosi

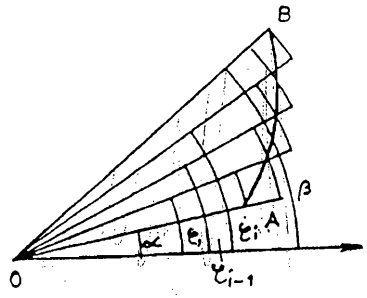
$$P_2 = \int_{r\cos\alpha}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\int_0^{\alpha} r^2\sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}r^2\alpha - \frac{1}{2}r^2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

gde je korišćena smena $x = r\cos t$, $\alpha \geqslant t \geqslant 0$. Zato je

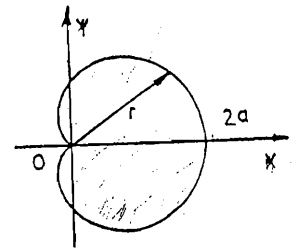
$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{2}r^2\alpha. \quad \blacktriangle$$

Neka je data kriva $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, u polarnom koordinatnom sistemu, gde je $r(\varphi)$ neprekidna funkcija. Geometrijsku figuru OAB ograničenu delovima polupravih $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ i krivom $r = r(\varphi)$ nazvaćemo *krivolinijskim trouglom*, sl. 7. Pokažimo da površina P tog trougla iznosi

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$



Sl. 8.5.7



Sl. 8.5.8

Neka je T podela segmenta $[\alpha, \beta]$, $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Označimo $m_i = \inf_{\varphi\in[\varphi_{i-1},\varphi_i]} r(\varphi)$, $M_i = \sup_{\varphi\in[\varphi_{i-1},\varphi_i]} r(\varphi)$. Kružni isečci poluprečnika m_i, odnosno M_i, ograničeni polupravim $\varphi = \varphi_{i-1}$ i $\varphi = \varphi_i$, imaju površinu $\frac{1}{2}m_i^2\Delta\varphi_i$, odnosno $\frac{1}{2}M_i^2\Delta\varphi_i$, gde je $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Unija svih ovih isečaka predstavlja upisanu figuru F_i, odnosno opisanu figuru F_e, za dati krivolinijski trougao. Površina $\underline{S}$ figure F_i iznosi $\underline{S} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i^2\Delta\varphi_i$, a površina $\overline{S}$ figure F_e iznosi $\overline{S} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}M_i^2\Delta\varphi_i$, što predstavlja donju, odnosno gornju Darbuovu sumu funkcije $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ na segmentu $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Zbog neprekidnosti funkcije $r = r(\varphi)$,

odavde sledi da za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podela T segmenta $[\alpha, \beta]$, tako da je $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon/2$. Kako je svaki kružni isečak merljiv, to postoji mnogougao K_i površine σ_i, upisan u F_i, kao i mnogougao K_e površine σ_e, opisan oko F_e, tako da je $\underline{S} - \sigma_i < \varepsilon/4$ i $\sigma_e - \overline{S} < \varepsilon/4$. Odavde je $\sigma_e - \sigma_i < \varepsilon$. Na osnovu stava 1 zaključujemo da je dati krivolinijski trougao merljiv i da mu površina iznosi $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$.

PRIMER 8.5.2

Nađimo površinu kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a > 0$, sl. 8.

Kako je kardioida simetrična figura, to je

$$P = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2. \quad \blacktriangle$$

Kriva linija. Dužina luka

Neka je $I = [\alpha, \beta]$ i neka su $\varphi\colon I \to \mathrm{R}$ i $\psi\colon I \to \mathrm{R}$ dve neprekidne funkcije. Preslikavanje $\Gamma\colon I \to \mathrm{R}^2$, dato sa

$$t \mapsto (\varphi(t), \psi(t)), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

naziva se *putanjom*. Tačke $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ i $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ nazivaju se *početnom*, odnosno *krajnjom tačkom* putanje, respektivno. Ako se početna i krajnja tačka poklapaju, putanja je *zatvorena*. Putanju Γ nazivamo *prostom* ako je $\Gamma\colon I \to \mathrm{R}^2$ injektivna funkcija. Kada je Γ zatvorena, a restrikcija $\Gamma|[\alpha, \beta)$ injektivna, onda je Γ ***zatvorena prosta putanja***.

Slika (zatvorene) proste putanje zove se *(zatvorena) prosta kriva*.

Za prostu krivu, definisanu prostom putanjom $\Gamma\colon I \to \mathrm{R}^2$, $\Gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, kaže se da je parametrizovana parametrom t. Pri tom obično kažemo da je kriva data jednačinama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

U analizi se često posmatra skup tačaka $\{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in \Delta\}$, gde je $\Delta \subset \mathrm{R}$ interval, a taj skup tačaka nije obavezno prosta kriva, no skup Δ se može podeliti na skupove $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, tako da su $\Gamma_i\colon [\alpha_{i-1}, \alpha_i] \to \mathrm{R}^2$, $\Gamma_i(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $\alpha_{i-1} \leqslant t \leqslant \alpha_i$, proste putanje. Pri tom, podela skupa Δ je takva da je $\Delta = \bigcup_i [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, a presek dva takva segmenta može biti samo krajnja tačka. Tada se pomenuti skup tačaka naziva *krivom*.

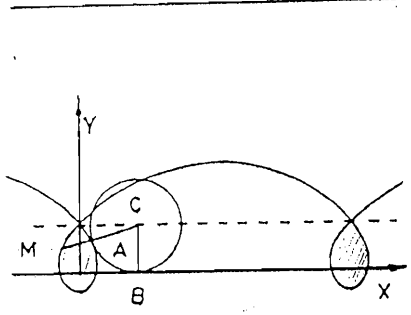
Primetimo da različite putanje mogu definisati jednu te istu krivu.

PRIMERI 8.5.3

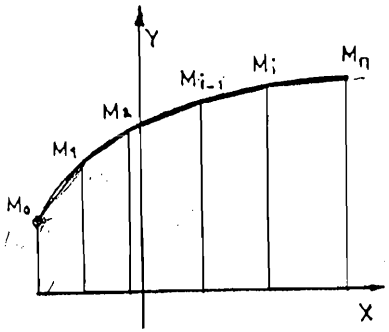
1° Putanja $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, jeste prosta. Slika ove putanje je polukrug, tj. prosta kriva. Ova kriva se može parametrizovati i ovako:

$$\tau \mapsto (\tau, \sqrt{1 - \tau^2}), \quad -1 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

2° Neka se krug poluprečnika r kotrlja bez klizanja po pravoj Ox. Uočimo na krugu fiksnu tačku A. Poluprečnik CA produžimo tako da dobijemo duž AM, sl. 9. Iz tačke C povucimo normalu CB na osu Ox. Kotrljanjem kruga po pravoj Ox, tačka M opisuje liniju koja se zove *produžena cikloida*. Obeležavajući ugao BCM



Sl. 8.5.9



Sl. 8.5.10

sa t i uzimajući osu Oy u tački $t = 0$, dobijaju se jednačine produžene cikloide u obliku

$$x = rt - a\sin t, \quad y = r - a\cos t, \qquad t \in \mathrm{R},$$

gde je $|CM| = a > r$.

Putanje $t \mapsto (rt - a\sin t, r - a\cos t)$, $k\pi \leqslant t \leqslant (k+1)\pi$, jesu proste za $k \in \mathrm{Z}$, a njihove slike su proste krive. Produžena cikloida je kriva u ravni Oxy. ▲

Neka je

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{2}$$

kriva linija u ravni Oxy, sl. 10. Uzmimo jednu podelu $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ segmenta $[\alpha, \beta]$. Tačke $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ označimo sa M_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Spojimo tačke M_{i-1} i M_i dužima za $i = 1, 2, \ldots, n$. Sa $s(P)$ označimo zbir

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|.$$

DEFINICIJA 8.5.2

Ako je zbir $s(P)$ ograničen za sve podele P, onda se kaže da se kriva (2) može *rektificirati**. Supremum skupa $\{s(P) \mid P \in \mathcal{P}[\alpha, \beta]\}$ naziva se u tom slučaju *dužinom* date krive.

Posmatrajmo dve podele P i P' segmenta $[\alpha, \beta]$. Ako je $P \subset P'$, onda za zbirove $s(P)$ i $s(P')$, koji odgovaraju podelama P i P', važi odnos $s(P) \leqslant s(P')$.

Naime, pretpostavimo da je $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ i $P' = P \cup \{t'\}$, $t_{k-1} < t' < t_k$. Kako je $s(P) = \sum_{i \neq k} |M_{i-1}M_i| + |M_{k-1}M_k|$, a $s(P') = \sum_{i \neq k} |M_{i-1}M_i| + |M_{k-1}M'| + |M'M_k|$, gde su $(\varphi(t'), \psi(t'))$ koordinate tačke M', vidi se da je $|M_{k-1}M_k| \leqslant |M_{k-1}M'| + |M'M_k|$. Ako su podele $P \subset P'$ proizvoljne, nejednakost $s(P) \leqslant s(P')$ se dobija induktivno.

* rectificare (lat.) – ispraviti

TEOREMA 8.5.1

Neka su $\varphi(t)$ i $\psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, neprekidne funkcije koje imaju i neprekidne izvode. Tada se kriva L, određena jednačinama $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, može rektificirati. Pri tom njena dužina s iznosi

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{3}$$

Dokaz:

Pokažimo najpre da se L može rektificirati. Neka je $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ podela segmenta $[\alpha, \beta]$. Označimo sa M_i tačke sa koordinatama $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Za zbir $s(P)$ dužina $|M_{i-1}M_i|$ dobija se izraz

$$s(P) = \sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$

Stavljajući $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti, imamo jednakosti

$$\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i, \quad \Delta y_i = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\eta_i)\Delta t_i,$$

gde je $t_{i-1} < \xi_i < t_i$, $t_{i-1} < \eta_i < t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na osnovu toga se dobija

$$s(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} \cdot \Delta t_i.$$

Funkcije φ' i ψ' su neprekidne na segmentu $[\alpha, \beta]$, pa su ograničene, tj. postoji konstanta K, tako da je $|\varphi'(t)| \leqslant K$, $|\psi'(t)| \leqslant K$, $t \in [\alpha, \beta]$. Zato važi nejednakost

$$0 < s(P) \leqslant \sum_{i=1}^n \sqrt{K^2 + K^2} \cdot \Delta t_i = \sqrt{2}(\beta - \alpha)K.$$

Dakle, skup $\{ s(P) \mid P \in \mathcal{P}[\alpha, \beta] \}$ je ograničen, tj. kriva L se može rektificirati.

Nađimo dužinu s krive L.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Posmatrajmo integralnu sumu

$$\sigma(\varphi, \psi, P, \xi) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \cdot \Delta t_i$$

integrala (3) za podelu P i izbor istaknutih tačaka $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$. Kako je podintegralna funkcija tog integrala neprekidna, to postoji

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(\varphi, \psi, P, \xi) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = J.$$

Odavde sledi da postoji $\delta_1 > 0$, tako da

$$P \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta_1 \implies |\sigma(\varphi, \psi, P, \xi) - J| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Procenimo sada izraz $|s(P) - \sigma(\varphi, \psi, P, \xi)|$. U tom cilju sa K_i i k_i označimo $K_i = \sup_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \psi'(t)$, $k_i = \inf_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \psi'(t)$. Tada važi

$$\left| \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \right| = \frac{|\psi'^2(\eta_i) - \psi'^2(\xi_i)|}{\sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} + \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)}} \leqslant K_i - k_i.$$

Na osnovu te procene je

$$\begin{aligned} |s(P) - \sigma(\varphi, \psi, P, \xi)| &= \left| \sum_{i=1}^n \left[\sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \right] \Delta t_i \right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \right| \Delta t_i \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n (K_i - k_i)\Delta t_i = S(\psi', P) - s(\psi', P). \end{aligned}$$

Kako je funkcija ψ' neprekidna, to postoji $\delta_2 > 0$, tako da

$$P \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta_2 \implies S(\psi', P) - s(\psi', P) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5}$$

Označimo $\min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$. Na osnovu (4) i (5) sledi

$$P \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta \implies |s(P) - J| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Dokažimo da od svih izlomljenih linija koje zadovoljavaju (6), postoje one čija se dužina ne razlikuje od dužine krive L za više od $\varepsilon/2$.

Zaista, kako je $s = \sup_P s(P)$, to postoji podela P', tako da za dužinu $s(P')$ izlomljene linije koja joj odgovara važi

$$|s(P') - s| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Podeli P' dodajmo nove tačke, tako da se dobije podela P, $\lambda(P) < \delta$. Kako se dodavanjem novih tačaka dužina izlomljene linije može samo povećati, to važi nejednakost $0 < s(P') \leqslant s(P) \leqslant s$. Na osnovu ove nejednakosti i (7) sledi

$$|s(P) - s| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Iz (6) i (8) imamo $|s - J| \leqslant |s - s(P)| + |s(P) - J| < \varepsilon$. Kako je ε proizvoljno, to je $s = J$. ■

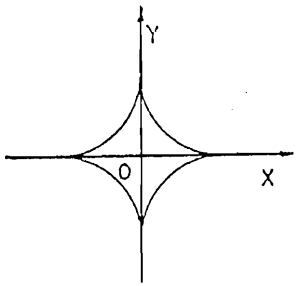
PRIMERI 8.5.4

1° Astroida $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, simetrična je u odnosu na koordinatne ose, sl. 11. S obzirom da je $x' = -3a\cos^2 t \sin t$, $y' = 3a\sin^2 t \cos t$, dužina s astroide je

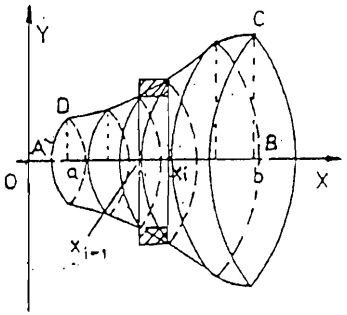
$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t}\, dt = 4 \cdot \frac{3a}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = 6a.$$

2° Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ glatka funkcija. Nađimo dužinu krive $y = f(x)$. Stavimo $x = t$, $y = f(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Tada je

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$



Sl. 8.5.11



Sl. 8.5.12

3° Izračunajmo dužinu s kružnog luka poluprečnika r i centralnog ugla α.

Jednačinu kruga napišimo u obliku $x^2 + y^2 = r^2$. Jednačina luka, smeštenog kao na sl. 5, jeste $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r\cos\alpha \leqslant x \leqslant r$, pa je

$$s = \int_{r\cos\alpha}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{r\cos\alpha}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = r\int_{\cos\alpha}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = r\alpha,$$

gde je korišćena smena $x = rt$, $\cos\alpha \leqslant t \leqslant 1$.

4° Neka je kriva data polarnom jednačinom $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, gde je funkcija $r(\varphi)$ glatka. Nađimo dužinu te krive.

Predstavimo krivu u parametarskom obliku

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \qquad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta.$$

U tom slučaju izraz za dužinu krive postaje

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\, d\varphi,$$

ili

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2_\varphi + r^2}\, d\varphi. \quad ▲$$

Zapremina obrtnih tela

Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ neprekidna i pozitivna funkcija. Ako se krivolinijski trapez, čije stranice su segment $[a, b]$, delovi pravih $x = a$, $x = b$ i kriva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, obrće oko x-ose, dobija se obrtno telo, sl. 12. Površ koja ograničava ovo telo sastoji se od dve „baze" (krugovi poluprečnika $f(a)$ i $f(b)$) i „omotača".

Definišimo zapreminu obrtnog tela. Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna podela segmenta $[a, b]$ i $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. U ravni Oxy uočimo pravougaonike sa osnovom $[x_{i-1}, x_i]$ i visinama m_i, odnosno M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Obrtanjem tih pravougaonika dobijaju se valjci. Unija valjaka čiji su poluprečnici osnova m_i ima zapreminu $v(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \pi \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, a unija valjaka sa poluprečnicima osnova M_i ima zapreminu $V(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \pi \Delta x_i$.

Zapremine $v(P)$, odnosno $V(P)$, predstavljaju donju, odnosno gornju, Darbuovu sumu funkcije $\pi f^2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Definišimo zapreminu V datog obrtnog tela kao (zajednički) limes ovih Darbuovih suma kad parametar podele teži nuli:

$$V = \lim_{\lambda(P)\to 0} v(P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} V(P) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

PRIMER 8.5.5

Odredimo zapreminu elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \leqslant 1$.

Ovaj elipsoid se dobija obrtanjem elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ oko x-ose. Drugačije, elipsoid možemo dobiti obrtanjem krive $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $-a \leqslant x \leqslant a$, oko x-ose. Zapremina V elipsoida data je izrazom

$$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi a b^2. \quad ▲$$

Ako se kriva data jednačinama

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

obrće oko x-ose, onda se zapremina V obrtnog tela dobija po formuli

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt.$$

Ovo jednostavno sledi iz teoreme 4.3.

Površina obrtnih tela

Definišimo površinu „omotača" obrtnog tela koje se dobija obrtanjem krivolinijskog trapeza $ABCD$ na slici 12 oko x-ose, s tim što ćemo pretpostaviti da je funkcija f glatka na segmentu $[a, b]$.

Uočimo ponovo podelu $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$. Spojmo tačke $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$ dužima, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka se krivolinijski trapez obrće zajedno sa izlomljenom linijom koja spaja tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Obrtanjem trapeza sa temenima u tačkama $(x_{i-1}, 0)$, $(x_i, 0)$, $(x_i, f(x_i))$ i $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, dobija se zarubljena kupa, čiji poluprečnici osnova su $f(x_{i-1})$ i $f(x_i)$. Zbir $S(P)$ površina omotača svih ovako dobijenih kupa biće

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\sqrt{\Delta x_i^2 + (\Delta f(x_i))^2},$$

gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Definišimo površinu S omotača obrtnog tela kao

$$S = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(P)$$

(pokazaćemo da pod navedenim pretpostavkama taj limes postoji).

U cilju nalaženja izraza za $S(P)$, pogodnog za nalaženje limesa, primetimo da je, prema Lagranžovoj teoremi o srednjoj vrednosti,

$$\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} = f'(\xi_i),$$

za neko $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Kako je f neprekidna funkcija, to postoji $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tako da je

$$f(x_{i-1}) + f(x_i) = 2f(\eta_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Uzimajući gornje jednakosti u obzir, dobija se

$$S(P) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Napišimo taj izraz u obliku

$$S(P) = 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i + 2\pi \sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i.$$

Funkcija $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ je neprekidna, dakle i ograničena na segmentu $[a, b]$; neka je $\sqrt{1 + f'^2(x)} \leqslant K$. Dokažimo da je

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i = 0.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Kako je f ravnomerno neprekidna na $[a, b]$, to postoji $\delta > 0$ tako da

$$x', x'' \in [a, b],\ |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)\pi K}.$$

Tada

$$P \in \mathcal{P},\ \lambda(P) < \delta \implies \left|2\pi \sum_{i=1}^{n} [f(\eta_i) - f(\xi_i)]\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i\right| < \varepsilon.$$

Na osnovu definicije je

$$S = \lim_{\lambda(P)\to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \cdot \Delta x_i = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Ako je kriva koja rotira data parametarski u obliku $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, obrazac za površinu S glasi

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

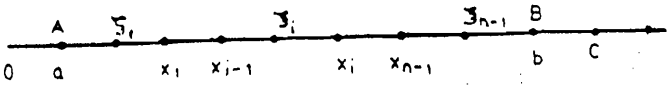
PRIMER 8.5.6

Nađimo površinu S omotača tela koje se dobija obrtanjem jednog svoda cikloide $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, oko ose Ox.

Kako je cikloida simetrična u odnosu na pravu $x = r\pi$, to je

$$S = 4\pi \int_0^\pi r^2(1 - \cos t)\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 16\pi r^2 \int_0^\pi \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = \frac{64}{3}\pi r^2. \quad \blacktriangle$$

Rad sile



Sl. 8.5.13

Neka promenljiva sila intenziteta $F(x)$ deluje na materijalnu tačku na putu OC, sl. 13 (za funkciju F se pretpostavlja da je neprekidna). Pravac i smer te sile su stalni, dok je intenzitet promenljiv i zavisi od rastojanja x između napadne tačke sile i tačke O. Koliki je rad te sile na putu AB?

Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podela segmenta $[a, b]$. Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ izaberimo proizvoljnu tačku ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Smatraćemo (v. primer 1.1.2°) da izraz

$$\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

predstavlja približnu vrednost rada date sile na putu AB. Rad sile intenziteta $F(x)$ na tom putu definiše se kao

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

8.6. NESVOJSTVENI INTEGRAL

Rimanov integral neke funkcije f, definisane na segmentu $[a, b]$, nije definisan ako je funkcija neograničena. Takođe, Rimanov integral funkcije, definisane na intervalu $[a, \infty)$, nije definisan. Da bismo obuhvatili ovakve slučajeve, proširićemo pojam integrala.

DEFINICIJA 8.6.1

Neka je funkcija f definisana u intervalu $[a, b)$ i integrabilna na svakom segmentu $[a, \beta] \subset [a, b)$. Ako postoji limes

$$\lim_{\beta\to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx,$$

on se naziva *nesvojstvenim integralom* funkcije f na intervalu $[a, b)$ i označava sa

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Često se simbol $\int_a^b f(x)\,dx$ naziva nesvojstvenim integralom sa *singularitetom* u tački b i ukoliko $\lim_{\beta\to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx$ postoji i konačan je, kaže se da nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira; u suprotnom slučaju se kaže da $\int_a^b f(x)\,dx$ divergira. Inače, nije teško pokazati da u slučaju da je funkcija f definisana na segmentu $[a, b]$ i da je integrabilna u Rimanovom smislu na njemu, važi $\lim_{\beta\to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, te zato nema mogućnosti zabune zbog ovog „dvostrukog" korišćenja simbola $\int_a^b f(x)\,dx$.

Slično se definiše nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sa singularitetom u tački a.

PRIMER 8.6.1

Ispitajmo konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, koji za $\alpha > 0$ ima singularitet u tački 0.

Najpre, za $\alpha \neq 1$ odredimo

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1 - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

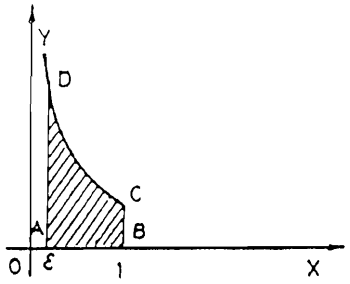
Prelaskom na limes imamo

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{za } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{za } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dalje je

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} (-\ln\varepsilon) = \infty.$$

Dakle, nesvojstveni integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira za $\alpha < 1$ i divergira za $\alpha \geqslant 1$.



Sl. 8.6.1

Geometrijski, ovi rezultati bi se mogli interpretirati na sledeći način.

Na slici 1 je prikazana kriva $y = 1/x^\alpha$, $0 < x \leqslant 1$. Površina P_ε krivolinijskog trapeza $ABCD$ je data integralom $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Ako je $\alpha < 1$, onda P_ε ne može biti veće od $\frac{1}{1-\alpha}$, bez obzira koliko malo bilo $\varepsilon > 0$. Međutim, ako je $\alpha \geqslant 1$, onda za proizvoljno veliki broj M postoji $\varepsilon > 0$, tako da je $P_\varepsilon \geqslant M$. ▲

DEFINICIJA 8.6.2

Neka je funkcija f definisana u intervalu $[a, \infty)$ i neka je integrabilna na svakom segmentu $[a, \beta] \subset [a, \infty)$. Ako postoji limes

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx,$$

on se naziva nesvojstvenim integralom funkcije f na intervalu $[a, \infty)$ i označava sa

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Često se simbol $\int_a^\infty f(x)\,dx$ naziva nesvojstvenim integralom sa singularitetom ∞. Ako $\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$ postoji i konačan je, kaže se da taj nesvojstveni integral konvergira; u suprotnom slučaju on divergira.

Primetimo da se slično definiše i nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

PRIMERI 8.6.2

1° Prema definiciji je

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to\infty} \operatorname{arctg}\beta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0 e^x\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}(1-e^\alpha) = 1.$$

2° Ispitajmo konvergenciju integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Neka je $\alpha\neq 1$. Tada je

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}(\beta^{1-\alpha}-1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{za } \alpha>1,\\ \infty, & \text{za } \alpha<1.\end{cases}$$

Kako je $\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x} = \lim_{\beta\to\infty}\ln\beta = \infty$, to možemo reći da $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira za $\alpha>1$ i divergira za $\alpha\leqslant 1$. ▲

Ubuduće ćemo za oba nesvojstvena integrala, iz definicije 1 i definicije 2, koristiti simbol $\int_a^b f(x)\,dx$ i govoriti da taj integral ima singularitet u tački b ako je funkcija neograničena na intervalu $[a,b)$ ili, pak, b predstavlja simbol ∞. Drugim rečima, ako je funkcija f definisana na konačnom ili beskonačnom intervalu $[a,b)$ i integrabilna na svakom segmentu $[a,\beta]\subset[a,b)$, onda nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira ako postoji konačan $\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)\,dx$; u suprotnom slučaju nesvojstveni integral divergira. Umesto $\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx$ (ako je b konačan broj), odnosno $\lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)\,dx$ (ako je $b=\infty$), pisaćemo kratko $\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta f(x)\,dx$.

Sve ove napomene važe i za integrale čiji je singularitet donja granica.

Osobine nesvojstvenog integrala

STAV 8.6.1

Neka su $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ nesvojstveni integrali sa singularitetom u tački b. Tada:

1° Ako ti integrali konvergiraju, važi jednakost $\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx+\mu\int_a^b g(x)\,dx$, za $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$.

2° Ako je $a<c<b$, tada $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira ako i samo ako konvergira $\int_c^b f(x)\,dx$ i važi $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.

3° Ako su f i g glatke funkcije i postoji konačan $\lim_{x\to b}(f\cdot g)(x)$, onda $\int_a^b(f\cdot g')(x)\,dx$ konvergira ako i samo ako konvergira $\int_a^b(f'\cdot g)(x)\,dx$. U tom slučaju važi jednakost

$$\int_a^b (f\cdot g')(x)\,dx = (fg)(x)\Big|_a^b - \int_a^b (f'\cdot g)(x)\,dx,$$

gde $(fg)(x)\big|_a^b$ znači $\lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)$.

Dokaz.

Tvrđenje 1° se dobija iz jednakosti

$$\int_a^\beta(\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^\beta f(x)\,dx+\mu\int_a^\beta g(x)\,dx,$$

prelaskom na limes kad $\beta\to b$.

2° Uzmimo β tako da je $a<c<\beta<b$. Tada je

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^\beta f(x)\,dx,$$

pa tvrđenje ponovo sledi prelskom na $\lim_{\beta\to b}$.

3° Iz jednakosti

$$\int_a^\beta (f\cdot g')(x)\,dx = (fg)(x)\Big|_a^\beta - \int_a^\beta (f'\cdot g)(x)\,dx$$

sledi

$$\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta (fg')(x)\,dx = \lim_{\beta\to b}(fg)(\beta) - (fg)(a) - \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta (f'g)(x)\,dx.$$

Kako $\lim_{\beta\to b}(fg)(\beta)$ postoji, to $\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta (fg')(x)\,dx$ postoji ako i samo ako postoji $\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta (f'g)(x)\,dx$. ■

Ako se u simbolu $\int_a^b f(x)\,dx$ singulariteti nalaze i u a i u b, onda ćemo staviti po definiciji

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Pri tom pretpostavljamo da je funkcija f integrabilna na svakom segmentu $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ i da važi nejednakost $a<c<b$. Prema stavu 1.2°, izbor broja c ne utiče na konvergenciju. Po definiciji, $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira ako svaki od dva nesvojstvena integrala $\int_a^c f(x)\,dx$ i $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergira.

PRIMERI 8.6.3

1° Integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx$ konvergira, jer možemo napisati

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx+\int_0^\infty e^{-x}\,dx,$$

a oba nesvojstvena integrala s desne strane konvergiraju.

2° Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$, divergira. Naime, napišimo

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}+\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Za $\alpha \geqslant 1$ divergira prvi, a za $\alpha \leqslant 1$ divergira drugi integral na desnoj strani jednakosti.

3° Za nesvojstveni integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ imamo

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \blacktriangle$$

Konačno, dodajmo još jednu definiciju.

Ako je funkcija f integrabilna na svakom segmentu oblika $[a, \alpha] \subset [a, c)$ i na svakom segmentu oblika $[\beta, b] \subset (c, b]$, $a < c < b$, definisaćemo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

ukoliko integrali s desne strane konvergiraju.

Kriterijumi za konvergenciju

U cilju utvrđivanja da li dati nesvojstveni integral konvergira ili ne, koriste se razni kriterijumi. Navešćemo nekoliko takvih kriterijuma. Ukoliko drugačije ne kažemo, smatraćemo da je singularitet integrala koji razmatramo u tački b.

TEOREMA 8.6.1

Da bi nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergirao, neophodno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji β_0, $a < \beta_0 < b$, tako da za svaki par β', β'', $\beta_0 < \beta' < \beta'' < b$, važi

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Dokaz.

Posmatrajmo funkciju $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $a \leqslant x < b$. Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira ako i samo ako postoji konačan $\lim_{x \to b} \varphi(x)$. To je, pak, ispunjeno ako i samo ako je ispunjen Košijev uslov

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \beta_0)(\forall \beta', \beta'')(\beta_0 < \beta' < \beta'' < b \implies |\varphi(\beta'') - \varphi(\beta')| < \varepsilon).$$

No,

$$\varphi(\beta'') - \varphi(\beta') = \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Jedan dovoljan uslov za konvergenciju daje

STAV 8.6.2

Neka je $|f(x)| \leqslant g(x)$, $x \in [a, b)$. Ako $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergira, onda i $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergira.

Dokaz.

Neka je ε proizvoljan pozitivan broj. Kako integral $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergira, to postoji β_0, tako da za $\beta_0 < \beta' < \beta'' < b$ važi $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$. Iz pretpostavke stava sledi

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{\beta'}^{\beta''} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{\beta'}^{\beta''} g(x)\,dx < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

DEFINICIJA 8.6.3

Nesvojstveni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *apsolutno konvergira* ako konvergira integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Iz stava 2 neposredno sledi

POSLEDICA 8.6.1

Ako $\int_a^b f(x)\,dx$ apsolutno konvergira, onda on i konvergira. $\blacksquare$

PRIMERI 8.6.4

1° Neka je $|f(x)| \leqslant k/x^\alpha$, $k = \text{const}$, $\alpha > 1$, za $x \in [a, \infty)$, $a > 0$. Tada integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergira. Naime, integral $\int_a^\infty \frac{k}{x^\alpha}\,dx = k \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira.

2° Integral $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergira. Ovo sledi iz nejednakosti $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, jer $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergira. $\blacktriangle$

Pitanje apsolutne konvergencije svodi se na pitanje konvergencije nesvojstvenih integrala nenegativnih funkcija. Zato ćemo razmatrati nekoliko kriterijuma za konvergenciju integrala takvih funkcija.

STAV 8.6.3

Za konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x) \geqslant 0$ za $x \in [a, b)$, potrebno je i dovoljno da postoji broj K, tako da je

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \leqslant K, \qquad a \leqslant \beta < b.$$

Dokaz.

Zbog $f(x) \geqslant 0$ za $x \in [a, b)$, funkcija $\varphi(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$ je rastuća. Konačan limes $\lim_{\beta \to b} \varphi(\beta)$ postoji ako i samo ako je ona ograničena. $\blacksquare$

STAV 8.6.4

Neka je $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ za $a \leqslant x < b$ i neka su

(1) $$\int_a^b f(x)\,dx,$$

(2) $$\int_a^b g(x)\,dx$$

nesvojstveni integrali sa singularitetom b. Tada iz konvergencije integrala (2) sledi konvergencija integrala (1), a iz divergencije integrala (1) sledi divergencija integrala (2).

Dokaz.

Označimo $\varphi(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$, $\psi(\beta) = \int_a^\beta g(x)\,dx$, $a \leqslant \beta < b$. Ako integral (2) konvergira, onda postoji broj K tako da je $\varphi(\beta) \leqslant \psi(\beta) \leqslant K$, pa integral (1) konvergira.

Drugo tvrđenje stava je kontrapozicija prvog. ■

Primetimo da se, na osnovu stava 1.2°, u stavu 4 uslov

$$a \leqslant x < b \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

može zameniti uslovom

$$a_0 \leqslant x < b \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

za neki broj a_0, $a < a_0 < b$.

STAV 8.6.5

Dati su nesvojstveni integrali (1) *i* (2), *pri čemu je* $g(x) > 0$ *za* $x \in [a, b)$. *Ako postoji* $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, $0 \leqslant C \leqslant \infty$, *onda iz konvergencije integrala* (2), *pri* $C < \infty$, *sledi konvergencija integrala* (1), *a iz divergencije integrala* (2), *pri* $C > 0$, *sledi divergencija integrala* (1). *Specijalno, ako je* $0 < C < \infty$, *onda integrali* (1) *i* (2) *konvergiraju, odnosno divergiraju, istovremeno.*

Dokaz.

Neka integral (2) konvergira i pri tom je $0 \leqslant C < \infty$. Kako je $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C$, to za $\varepsilon > 0$ postoji $\beta_0 < b$, tako da je

$$C - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < C + \varepsilon, \quad \text{za} \quad \beta_0 < x < b.$$

Odavde je

$$f(x) < (C + \varepsilon)g(x), \qquad \beta_0 < x < b,$$

pa iz konvergencije integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ (a samim tim i integrala $\int_a^b (C+\varepsilon)g(x)\,dx$) sledi i konvergencija integrala (1).

Neka integral (2) divergira i pri tom je $0 < C \leqslant \infty$. Tada divergira i integral (1). Naime, pretpostavimo da integral (1) konvergira. Iz pretpostavke sledi

$$\lim_{x\to b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{C}, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{C} < \infty.$$

Prema gore dokazanom, zbog konvergencije integrala (1), konvergirao bi i integral (2), što je kontradikcija. ■

PRIMERI 8.6.5

1° Nesvojstveni integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ konvergira, jer je $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ za $1 \leqslant x < \infty$, a integral $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ konvergira.

2° Ispitajmo konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Kako je $\lim_{x\to\infty} \frac{1/[x\sqrt{1+x^2}]}{1/x^2} = 1$, a integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergira, to i dati integral konvergira. ▲

Videli smo da iz apsolutne konvergencije sledi konvergencija nesvojstvenog integrala. Da obrnuto ne važi, pokazuje sledeći

PRIMER 8.6.6

Pokažimo da integral $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergira. U tom cilju napišimo

$$\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^\infty - \int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Integral $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergira (primer 4.2°), odakle sledi da dati integral konvergira.

No, dati integral ne konvergira apsolutno. Naime, važi

$$\int_{\pi/2}^\beta \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int_{\pi/2}^\beta \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\beta \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\beta \frac{\cos 2x}{x}\,dx.$$

Integral $\int_{\pi/2}^\beta \frac{dx}{x}$ nije ograničen, dok je integral $\int_{\pi/2}^\beta \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ ograničen (konvergencija integrala $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ dokazuje se slično kao i konvergencija integrala $\int_{\pi/2}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$). Dakle, $\int_{\pi/2}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ divergira. ▲

Za nesvojstveni integral koji konvergira, ali ne konvergira apsolutno, često se kaže da *konvergira uslovno*.

Navedimo sada jedan kriterijum za ispitivanje (ne apsolutne) konvergencije.

TEOREMA 8.6.2 (Abel-Dirihle)

Neka su funkcije f *i* g *definisane na* $[a, b)$ *i integrabilne na svakom segmentu* $[a, \beta] \subset [a, b)$. *Za konvergenciju nesvojstvenog integrala*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

dovoljno je da budu ispunjeni uslovi:

(D_1) f *je neprekidna na* $[a, b)$ *i ima ograničenu primitivnu funkciju;*

(D_2) g *je glatka na* $[a, b)$ *i monotono teži nuli za* $x \to b$;

ili

(A_1) f *je neprekidna na* $[a, b)$ *i nesvojstveni integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergira;*

(A_2) g *je glatka, monotona i ograničena na* $[a, b)$.

Dokaz.

Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (D_1) i (D_2). Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Kako f ima ograničenu primitivnu funkciju, to postoji broj M, tako da je $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| < M$ za $a \leqslant \beta' < \beta'' < b$. Funkcija $g(x)$ monotono teži nuli za $x \to b$, pa postoji $\beta_0 \in [a, b)$ tako da je $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ za $x > \beta_0$. Prema drugoj teoremi o srednjoj vrednosti integrala (teorema 4.2) za $\beta_0 < \beta' < \beta'' < b$ postoji $\xi \in (\beta', \beta'')$, tako da važi jednakost

$$\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)g(x)\,dx = g(\beta')\int_{\beta'}^{\xi} f(x)\,dx + g(\beta'')\int_{\xi}^{\beta''} f(x)\,dx.$$

Odavde je

$$\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)g(x)\,dx\right| < |g(\beta')| \cdot M + |g(\beta'')| \cdot M < \varepsilon.$$

Prema teoremi 1, tvrđenje je dokazano.

Slično se dokazuje tvrđenje teoreme i u slučaju kada su ispunjeni uslovi (A_1) i (A_2). ■

Primetimo da se teorema može dokazati i uz slabije uslove. Naime, pretpostavke o neprekidnosti funkcije f, odnosno glatkosti funkcije g, mogu se izostaviti.

PRIMER 8.6.7

Nesvojstveni integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^n}\,dx$, $a \in \mathbf{R}$, $n > 0$, konvergira, jer funkcija $\sin ax$ (za $a \neq 0$) ima ograničenu primitivnu funkciju, a $\frac{1}{1+x^n}$ monotono teži nuli za $x \to \infty$. ▲

ZADACI

1. Ne koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu, naći određene integrale $\int_0^1 a^x\,dx$ $(a > 0)$, $\int_0^x \cos t\,dt$, $\int_a^b x^m\,dx$ $(m \in \mathbf{N})$.

2. Pokazati da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & \text{za } x \neq 0, \\ 0, & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

integrabilna na segmentu $[0, 1]$.

3. Neka je $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dokazati da je $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ ako i samo ako je $f(x) = 0$ u svakoj tački segmenta $[a, b]$ u kojoj je f neprekidna.

4. Neka je funkcija f neprekidna, a φ i ψ su diferencijabilne na $\mathbf{R}$. Dokazati da važi jednakost

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

5. Ako je f neprekidna na $[0, 1]$, dokazati da je

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx; \quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

6. Neka je f integrabilna neparna funkcija na segmentu $[-l, l]$. Dokazati da je $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$.

7. Izračunati integral $J(2m, 2n) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx$, $m, n \in \mathbf{N}$.

8. Neka je f dva puta diferencijabilna funkcija na segmentu $[a, b]$. Ako je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ podela segmenta $[a, b]$, $\frac{x_i - x_{i-1}}{n} = h$, $f(x_i) = y_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, onda važi formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + \cdots + y_{n-1})] + R_2, \quad R_2 = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2,$$

za neko $\xi \in [a, b]$. Dokazati.

9. Dokazati da je funkcija $\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ definisana na $\mathbf{R}$, neparna i da ima limes za $x \to \infty$.

10. Pokazati da je funkcija $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ definisana, neparna i beskonačno diferencijabilna na skupu $\mathbf{R}$ i da postoji $\lim_{x\to\infty} \Phi(x)$.

11. (a) Neka $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $f\colon [a, b] \to [c, d]$ i $g \in C[c, d]$. Dokazati da tada $g \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

(b) Pokazati primerom da mogu postojati funkcije f i g koje su integrabilne (na odgovarajućim intervalima), ali da složena funkcija $g \circ f$ nije integrabilna.

12. (a) Ako je A skup mere nula i $B \subset A$, dokazati da je i B skup mere nula.

(b) Ako su A_i, $i = 1, 2, \ldots$, skupovi mere nula, dokazati da je i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ skup mere nula.

13. Na hiperboli $x^2 - y^2 = 1$ uočene su tačke $M(x, y)$ i $A(1, 0)$. Pokazati da je površina krivolinijskog trougla OAM jednaka $\frac{1}{2}\operatorname{arch} x$. Drugim rečima, pokazati da, ako se dvostruka vrednost te površine označi sa t, data hiperbola ima parametarsko predstavljanje $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$. (Navedene činjenice su razlog termina „hiperbolički" sinus i kosinus, kao i „area" (površina).)

14. Izraziti dužinu elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ pomoću eliptičkog integrala.

15. Dokazati da je $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

16. *Glavnom vrednošću** integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ koji ima singularitet u tački $c\in(a,b)$, naziva se limes (ako postoji)

$$\lim_{\epsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\epsilon}f(x)\,dx+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx\right)=\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Slično, glavnom vrednošću integrala $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx$ naziva se (ako postoji)

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)\,dx=\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx.$$

Naći glavne vrednosti sledećih divergentnih integrala:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x},\quad\int_{-\infty}^{\infty}x\,dx,\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx.$$

17. Koristeći integralne sume naći

$$1^\circ\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right);\quad 2^\circ\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0).$$

18. Pokazati da $\int_0^\infty\sin(x^2)\,dx$ konvergira, mada $\sin(x^2)\not\to 0$ za $x\to\infty$.

19. Polazeći od nejednakosti Heldera i Minkovskog za sume (odeljak 6.8) izvesti odgovarajuće integralne nejednakosti:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant\left[\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right]^{1/q},$$

za $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ i $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

$$\left[\int_a^b|f(x)+g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\leqslant\left[\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}+\left[\int_a^b|g(x)|^p\,dx\right]^{1/p},$$

za $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ i $p>1$.

20. Pokazati da ako je $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ periodična funkcija, integrabilna na svakom segmentu $[a,b]$, tada funkcija $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ može biti predstavljena kao zbir linearne i periodične funkcije.

21. Neka je $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ ograničena funkcija, $M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$.

1° Ako je $P\in\mathcal{P}[a,b]$, $d=\lambda(P)$ i P' je podela segmenta $[a,b]$ koja se iz podele P dobija dodavanjem l novih tačaka, dokazati da je

$$S(f,P)-S(f,P')\leqslant(M-m)ld,\qquad s(f,P')-s(f,P)\leqslant(M-m)ld.$$

2° Na osnovu prethodnog dokazati Darbuovu teoremu 1.2.

3° Dokazati posledicu 1.1.

* v.p. = valeur principal (fr.) – glavna vrednost

9. METRIČKI PROSTORI. FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH

Ako se detaljno analizira teorija graničnih vrednosti u skupu realnih brojeva, razvijena u trećoj i četvrtoj glavi, može se zaključiti da u osnovi tog pojma leži činjenica da je između realnih brojeva definisano *rastojanje*

$$d(x,y)=|x-y|.$$

Dalji pojmovi, kao što su okolina, limes, neprekidnost itd, mogu se jednostavno uvesti pomoću pojma rastojanja, naravno zahvaljujući i određenim osobinama koje funkcija d poseduje. To navodi na pomisao da bi se teorija graničnih vrednosti mogla razviti i u nekim drugim skupovima — na primer, u višedimenzionim euklidskim prostorima, ali i mnogo opštijim — samo uz pretpostavku da je na takvom skupu definisano rastojanje sa odgovarajućim osobinama. Takve strukture nazivaju se *metričkim prostorima* i biće obrađene u ovoj glavi. Posebno, kao jedan od najjednostavnijih, ali istovremeno i najvažnijih primera biće obrađen slučaj konačnodimenzionih euklidskih prostora; kao što je detaljno poznavanje svojstava skupa $\mathbf{R}$ bilo suštinsko za kasnije ispitivanje svojstava realnih funkcija realne promenljive, tako će poznavanje osobina pomenutih prostora biti osnova za ispitivanje funkcija više (realnih) promenljivih, koje će takođe biti obrađene u ovoj glavi.

9.1. DEFINICIJA, PRIMERI I OSNOVNE OSOBINE

Sledeću definiciju dao je Freše* 1906. godine.

DEFINICIJA 9.1.1

Neka je X proizvoljan skup i $d:X\times X\to\mathbf{R}$ funkcija koja svakom paru elemenata skupa X dodeljuje realan broj. Ako ta funkcija ima osobine:

1° $d(x,y)\geqslant 0$;

2° $d(x,y)=0$ ako i samo ako je $x=y$;

* M. Frechet (1878–1973), francuski matematičar

$3°$ $d(x,y) = d(y,x)$;
$4°$ $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$
(x, y, z su proizvoljni elementi skupa X), onda kažemo da je d *rastojanje (metrika)* na X, a par (X,d) (ili samo X ako se podrazumeva o kojoj se funkciji d radi) nazivamo *metričkim prostorom*.

Nejednakost $4°$ obično ćemo, iz razumljivih razloga, nazivati *nejednakošću trougla*.

Sledeći spisak primera metričkih prostora pokazuje koliko raznorodni ti primeri mogu da budu.

PRIMERI 9.1.1

$1°$ Kao što je već rečeno u uvodu, osnovni, inspirativni primer metričkog prostora je skup realnih (ili kompleksnih) brojeva $\mathbf{R}$ (ili $\mathbf{C}$) sa rastojanjem $d(x,y) = |x-y|$. Da ta funkcija d zaista poseduje osobine $1°$–$4°$ ili je trivijalno ili je dokazano u drugoj glavi (v. kraj odeljka 2.5 i komentar posle stava 2.9.4).

$2°$ Najjednostavnije uopštenje prostora $\mathbf{R}$ predstavlja, čitaocu poznat iz linearne algebre, konačnodimenzioni euklidski prostor $\mathbf{R}^k$ čiji su elementi uređene k-torke realnih brojeva

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_i)_{i=1}^k.$$

Podsetimo se ukratko osnovnih algebarskih osobina ovog prostora.

U $\mathbf{R}^k$ su definisani sabiranje i množenje skalarom pomoću

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \qquad \lambda(x_i) = (\lambda x_i),$$

za $(x_i), (y_i) \in \mathbf{R}^k$ i $\lambda \in \mathbf{R}$. U odnosu na te operacije $\mathbf{R}^k$ ima strukturu *vektorskog prostora* dimenzije k. Dalje, definisan je *skalarni proizvod* pomoću

$$(x_i) \cdot (y_i) = \sum_{i=1}^k x_i y_i,$$

sa uobičajenim osobinama; izdvojmo među tim osobinama Koši-Švarcovu nejednakost

$$(x \cdot y)^2 \leqslant (x \cdot x)(y \cdot y),$$

ili, u razvijenom obliku,

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k y_i^2\right)$$

(v. i zadatak 2.34). Skalarni proizvod u $\mathbf{R}^k$ omogućava da se uvede i *norma* (intenzitet) vektora $x = (x_i) \in \mathbf{R}^k$ pomoću

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)^{1/2}.$$

Ta funkcija ima sledeće osobine:

(1) $\|x\| \geqslant 0$ za $x \in \mathbf{R}^k$ i $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ za $x \in \mathbf{R}^k$ i $\lambda \in \mathbf{R}$;
(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ za $x, y \in \mathbf{R}^k$.

Osobina (3) se lako izvodi iz Koši-Švarcove nejednakosti; u razvijenom obliku ona glasi

$$\left(\sum_{i=1}^k (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^k x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^k y_i^2\right)^{1/2}$$

i predstavlja poznatu nejednakost Minkovskog (v. primer 6.8.3.5°).

Uvedimo sada rastojanje između elemenata $x = (x_i)$ i $y = (y_i)$ skupa $\mathbf{R}^k$ pomoću

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)} = \left(\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Prve tri osobine iz definicije rastojanja su očigledno ispunjene, a osobina $4°$ se lako izvodi iz nejednakosti Minkovskog, zamenjujući u osobini (3) norme x sa $x - y$, a y sa $y - z$.

$3°$ U skupu $\mathbf{R}^k$ (kao, uostalom, i u bilo kom skupu) metrika se može uvesti na više načina. Jedno od korisnih uopštenja prethodnog primera jeste metrika d_p za $p \geqslant 1$ koja se uvodi pomoću

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^p\right)^{1/p},$$

za $x, y \in \mathbf{R}^k$. Od osobina rastojanja ponovo je netrivijalno samo četvrto; ono sledi opet iz nejednakosti Minkovskog (primer 6.8.3.5°)

$$\left(\sum_{i=1}^k |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^k |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Metrički prostor $(\mathbf{R}^k, d_p)$ označavaćemo sa $\mathbf{R}_p^k$. Najinteresantniji posebni slučajevi koje ćemo posmatrati biće $p = 1$ kada je

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|,$$

zatim već razmatran slučaj $p = 2$, odnosno $\mathbf{R}_2^k = \mathbf{R}^k$ i najzad slučaj $p = \infty$ kada ćemo po definiciji staviti

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i - y_i|.$$

(Čitaocu prepuštamo da dokaže da je $\lim_{p\to\infty} d_p(x,y) = d_\infty(x,y)$, što opravdava uvedenu oznaku, v. i zadatak 3.3).

4° Od raznih poznatih primera metričkih prostora beskonačnih nizova pomenimo prostor m svih ograničenih nizova realnih brojeva $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ u kome se rastojanje uvodi pomoću

$$d(x,y) = \sup_{1\leqslant i<\infty} |x_i - y_i|$$

za $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in m$. Osobine rastojanja se lako proveravaju.

5° U skupu $C[a,b]$ svih neprekidnih realnih funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, definisanih na segmentu $[a,b]$ realne prave, uvodimo rastojanje formulom

$$d(f,g) = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

za f, $g \in C[a,b]$. Da prethodni izraz ima smisla za svake dve neprekidne realne funkcije tvrdi Vajerštrasova teorema 5.3.2. Osobine rastojanja neposredno se proveravaju.

6° U skupu $C[a,b]$ metrika se može uvesti i pomoću

$$d_p(f,g) = \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx\right]^{1/p}$$

za $p \geqslant 1$. Nejednakost trougla sledi iz integralne nejednakosti Minkovskog, koja se dobija iz obične nejednakosti Minkovskog, napisane za integralne sume (v. zadatak 8.19). Specijalni slučajevi koji su od posebnog interesa su opet $p = 1$ („integralna metrika"), $p = 2$ („metrika srednjeg kvadratnog odstupanja") i $p = \infty$, pri čemu je lako videti da je $d_\infty = d$ (iz prethodnog primera). ▲

U preostalom delu ovog odeljka uvešćemo neke osnovne pojmove i termine teorije metričkih prostora. Mnogi od tih termina pozajmljeni su iz teorije dvodimenzionog ili trodimenzionog euklidskog prostora. Zato su i neki crteži koji će poslužiti kao ilustracija izrađeni tako da asociraju na takve prostore. Čitaocu preporučujemo da i sam koristi slične skice, ali da ipak pri tom ne zaboravi da se svojstva koja se dokazuju mogu odnositi i na mnogo apstraktniju situaciju. Štaviše, geometrijska intuicija može ponekad biti sasvim neadekvatna (v. npr. zadatak 12). S tim u vezi nije loše pomenuti sledeću Poenkareovu* „definiciju": „Matematika je umetnost davanja istog imena različitim stvarima".

DEFINICIJA 9.1.2

Neka je (X,d) metrički prostor, $a \in X$ i r pozitivan realan broj. *Otvorena (zatvorena) kugla* sa centrom u a, poluprečnika r, jeste skup

$$K(a,r) = \{\, x \in X \mid d(x,a) < r \,\} \qquad (\text{odnosno } K[a,r] = \{\, x \in X \mid d(x,a) \leqslant r \,\}).$$

* H. Poincare (1857–1912), francuski matematičar

Sfera sa centrom a i poluprečnika r je skup

$$S(a,r) = \{\, x \in X \mid d(x,a) = r \,\}.$$

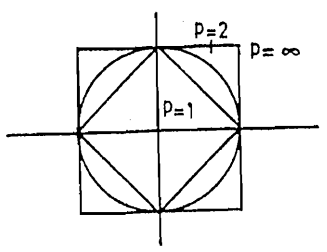
Ubuduće, kada kažemo samo „kugla", podrazumevaćemo „otvorena kugla".

PRIMERI 9.1.2

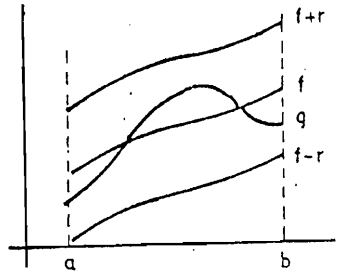
1° U metričkom prostoru R kugla $K(a,r)$ jeste interval $(a-r, a+r)$.

2° U metričkom prostoru $\mathbf{R}^2$ zatvorene kugle su krugovi, a u $\mathbf{R}^3$ lopte.

3° U prostoru $\mathbf{R}_p^k$ kugla može imati geometrijski razne oblike. Određenosti radi, zadržimo se na slučaju $k = 2$. Neka je a tačka sa koordinatama $(0,0)$; tada je lako videti da je za $p = 2$ kugla $K[a,r]$ krug poluprečnika r, za $p = 1$ ona je kvadrat upisan u taj krug, a za $p = \infty$ kvadrat opisan oko kruga, sl. 1.



Sl. 9.1.1



Sl. 9.1.2

4° Neka je $f \in C[a,b]$ i $r > 0$. Kuglu $K[f,r]$ sačinjavaju sve one funkcije $g \in C[a,b]$ čiji grafik ne izlazi iz „trake" ograničene graficima funkcija $f(x) - r$ i $f(x) + r$, sl. 2. ▲

U vezi s kuglama u raznim prostorima $\mathbf{R}_p^k$ često ćemo kasnije koristiti sledeće jednostavno svojstvo.

STAV 9.1.1

1° *Neka* $x, y \in \mathbf{R}^k$ *i neka je* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Tada je*

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_p(x,y) \leqslant k^{1/p} d_\infty(x,y).$$

2° *Svaka kugla prostora* $\mathbf{R}_p^k$ *sa centrom u tački* a *sadrži neku kuglu, sa istim centrom, prostora* $\mathbf{R}_\infty^k$ *i obrnuto.*

Dokaz.

1° je neposredna posledica definicije rastojanja d_p i d_∞.

2° sledi iz 1°. Naime, lako se proverava da kugla $K(a,r)$ prostora $\mathbf{R}_p^k$ sadrži kuglu $K(a, r/k^{1/p})$ prostora $\mathbf{R}_\infty^k$ i, slično, kugla $K(a,r)$ prostora $\mathbf{R}_\infty^k$ sadrži kuglu $K(a,r)$ prostora $\mathbf{R}_p^k$. ■

DEFINICIJA 9.1.3

Podskup metričkog prostora je *ograničen* ako je sadržan u nekoj kugli (konačnog poluprečnika).

PRIMERI 9.1.3

1° Svaka kugla je ograničen skup.

2° Neka je X proizvoljan skup i d funkcija definisana pomoću

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \neq y, \\ 0, & \text{za } x = y. \end{cases}$$

Lako je proveriti da je d metrika i da je ceo prostor X ograničen u toj metrici (u stvari je $X = K[x,1]$ za proizvoljnu tačku $x \in X$).

3° Skup $\{(x,y) \mid xy = 1\}$ nije ograničen u R^2. ▲

DEFINICIJA 9.1.4

Podskup G metričkog prostora (X,d) je *otvoren* ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku otvorenu kuglu sa centrom u toj tački, tj. ako

$$(\forall x \in G)(\exists \delta > 0)\, K(x,\delta) \subset G.$$

PRIMERI 9.1.4

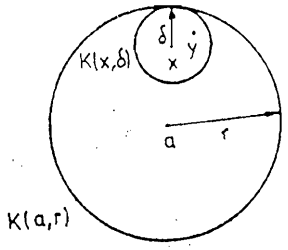
1° Ceo prostor X i prazan skup $\emptyset$ su otvoreni skupovi u proizvoljnom metričkom prostoru (X,d).

2° Dokažimo da je svaka otvorena kugla $K(a,r)$ otvoren skup.

Neka je $x \in K(a,r)$, tj. neka je $d(x,a) < r$. Izaberimo $\delta = r - d(x,a) > 0$ i dokažimo da je $K(x,\delta) \subset K(a,r)$. Zaista, ako je $y \in K(x,\delta)$, tada je $d(x,y) < \delta$, pa je

$$d(a,y) \leqslant d(a,x) + d(x,y) < r - \delta + \delta = r,$$

odakle sledi $y \in K(a,r)$, čime je pomenuta inkluzija dokazana.



Sl. 9.1.3

3° Slično se dokazuje da je skup

$$\{x \in X \mid d(x,a) > r\}$$

takođe otvoren. ▲

DEFINICIJA 9.1.5

Podskup F metričkog prostora (X,d) je *zatvoren* ako mu je komplement $X \setminus F$ otvoren.

PRIMERI 9.1.5

1° Prostor X i prazan skup $\emptyset$ su zatvoreni.

2° Na osnovu definicije i prethodnog primera 3° neposredno sledi da je svaka zatvorena kugla $K[a,r] = \{x \in X \mid d(x,a) \leqslant r\}$ zatvoren skup. Lako je videti da to važi i za $r = 0$, tj. da je svaka tačka (tačnije, jednočlan skup) zatvoren skup. ▲

TEOREMA 9.1.1

1° *Unija proizvoljno mnogo, kao i presek konačno mnogo otvorenih skupova su otvoreni skupovi.*

2° *Presek proizvoljno mnogo, kao i unija konačno mnogo zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.*

Dokaz.

1° Neka su G_i, $i \in I$, otvoreni skupovi i $G = \bigcup_{i \in I} G_i$. Da bismo dokazali da je i G otvoren skup, uočimo proizvoljnu tačku $x \in G$. Po definiciji unije, ona pripada nekom od skupova G_i. Kako je taj skup G_i otvoren, to je za neko $r > 0$ ispunjeno $K(x,r) \subset G_i$. No očigledno $G_i \subset G$, pa i $K(x,r) \subset G$, čime je dokazano da je G otvoren skup.

Neka su sada $G_1, G_2, \ldots, G_n$ otvoreni skupovi i $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Uočimo ponovo proizvoljnu tačku $x \in G$. Ona pripada svim podskupovima G_i, te za svako $i = 1, 2, \ldots, n$ postoji $r_i > 0$, takvo da je $K(x,r_i) \subset G_i$. Označimo $r = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i$. Tada je $r > 0$ i $K(x,r) \subset G_i$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, pa je i $K(x,r) \subset G$.

2° Ovaj deo tvrđenja sledi iz definicije zatvorenog skupa i de Morganovih obrazaca. ■

Istaknimo da je uslov konačnosti u prethodnoj teoremi bitan (v. zadatak 11).

Kao što znamo iz treće i četvrte glave, pojam okoline je fundamentalan u zasnivanju teorije graničnih vrednosti. U metričkim prostorima okoline se uvode sledećom definicijom.

DEFINICIJA 9.1.6

Okolinom tačke x metričkog prostora nazivamo svaki otvoren skup koji sadrži tu tačku. Specijalno, kuglu $K(x,\delta)$ nazivamo *δ-okolinom* tačke x.

DEFINICIJA 9.1.7

Neka je X metrički prostor i A njegov podskup. Za tačku $a \in X$ kažemo da je:

1° *unutrašnja tačka* skupa A ako ona pripada skupu A zajedno sa nekom svojom okolinom;

2° *spoljašnja tačka* skupa A ako je ona unutrašnja tačka skupa $X \setminus A$;

3° *granična tačka* skupa A ako nije ni njegova unutrašnja ni njegova spoljašnja tačka, tj. ako svaka okolina te tačke sadrži kako tačke skupa A, tako i tačke skupa $X \setminus A$.

PRIMER 9.1.6

Neka je $X = \mathrm{R}^k$, $a \in X$, $r > 0$ i A bilo koji od skupova $K(a,r)$ ili $K[a,r]$. Lako se proverava da je skup unutrašnjih tačaka skupa A jednak $K(a,r)$, a skup njegovih graničnih tačaka jednak $S(a,r)$. ▲

Lako se proverava da važi

STAV 9.1.2

Za podskup G metričkog prostora sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1° *G je otvoren;*

2° *G je okolina svake svoje tačke;*

3° *svaka tačka skupa G je njegova unutrašnja tačka.* ■

DEFINICIJA 9.1.8

Neka je X metrički prostor i $A \subset X$. Za tačku $a \in X$ kažemo da je *tačka nagomilavanja* skupa A ako se u svakoj okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo tačaka skupa A. Skup svih tačaka nagomilavanja označavaćemo sa A'. Skup $A \cup A'$ nazivaćemo *adherencijom* skupa A i označavaćemo sa $\overline{A}$.

STAV 9.1.3

Podskup F metričkog prostora X je zatvoren ako i samo ako je $F = \overline{F}$, tj. ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

Dokaz.

Neka je F zatvoren skup i neka $x \notin F$. Dokažimo da x nije tačka nagomilavanja skupa F. Skup $G = X \setminus F$ je otvoren i sadrži tačku x, pa je on okolina tačke x. Dakle, x je spoljašnja tačka skupa F, te ne može biti njegova tačka nagomilavanja.

Obrnuto, pretpostavimo da je $F = \overline{F}$, tj. da F sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Dokažimo da je $G = X \setminus F$ otvoren skup. Neka je x proizvoljna tačka skupa G, dakle $x \notin F$. Prema pretpostavci, x nije tačka nagomilavanja skupa F, što znači da postoji okolina tačke x koja sadrži najviše konačno mnogo tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ skupa F. Sve te tačke su, naravno, različite od same tačke x, pa od konačno mnogo pozitivnih brojeva $d(x_i, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, postoji najmanji — označimo ga sa $d > 0$. Tada je $K(x, d)$ otvorena kugla oko tačke x koja ne sadrži nijednu tačku skupa F, tj. koja je sadržana u $G = X \setminus F$; time je dokazano da je G otvoren, a F zatvoren skup. ■

PRIMER 9.1.7

Neka su X, a, r i A kao u primeru 6. Tada je $\overline{A} = K[a, r]$, a na osnovu prethodnog stava je $\overline{S(a, r)} = S(a, r)$. ▲

Tačke adherencije $\overline{A}$ skupa A još ćemo nazivati *adherentnim tačkama* skupa A. Jasno je iz prethodnog da je neka tačka adherentna za skup A ako i samo ako je ona njegova tačka nagomilavanja ili ako mu pripada. U poslednjem slučaju ona može i da ne bude njegova tačka nagomilavanja — takvu tačku onda zovemo *izolovanom tačkom* skupa A. Izolovane tačke skupa A možemo još okarakterisati kao one tačke skupa A koje imaju bar jednu okolinu u kojoj nema tačaka skupa A osim nje same. Adherentne tačke skupa A možemo okarakterisati kao one tačke koje u svakoj svojoj okolini sadrže bar neku tačku skupa A.

PRIMERI 9.1.8

1° Skup $\{ 1/n \mid n \in \mathbf{N} \}$ u metričkom prostoru $\mathbf{R}$ sastoji se samo od izolovanih tačaka. Jedina njegova tačka nagomilavanja je 0, pa je $A' = \{0\}$, a $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

2° Za skup racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ u $\mathbf{R}$ je $\mathbf{Q}' = \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. ▲

Zadržimo se na kraju još na pojmu potprostora metričkog prostora.

DEFINICIJA 9.1.9

Neka je (X, d) metrički prostor i $X_1 \subset X$. Ako metriku d_1 na X_1 definišemo pomoću

$$d_1(x, y) = d(x, y) \quad \text{za} \quad x, y \in X_1,$$

za dobijeni metrički prostor (X_1, d_1) kažemo da je metrički potprostor prostora (X, d).

PRIMERI 9.1.9

1° Za $m < n$, prostor $\mathbf{R}_p^m$ je metrički potprostor prostora $\mathbf{R}_p^n$. Naime, tačka $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}_p^m$ se može identifikovati sa tačkom $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}_p^n$.

2° Skup c konvergentnih realnih nizova je podskup prostora m svih ograničenih nizova, a skup c_0 nula-nizova je podskup skupa c. Oba ta skupa mogu se shvatiti kao potprostori prostora m sa rastojanjem

$$d(x, y) = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |x_i - y_i| \quad \text{, za} \quad x = (x_i),\ y = (y_i). \quad ▲$$

Na taj način, svaki podskup metričkog prostora je i sam jedan metrički prostor, pa u njemu ima smisla govoriti o pojmovima kao što su kugle, okoline, otvoreni i zatvoreni skupovi itd. Međutim, treba pri tom stalno imati na umu da su ti pojmovi relativni, tj. vezani su za sam potprostor, jer u protivnom bi moglo doći do nesporazuma, kao što pokazuje sledeći

PRIMER 9.1.10

Skup $\mathbf{R}$ sa uobičajenom metrikom je na osnovu primera 9.1° metrički potprostor prostora $\mathbf{R}^2$. Otvoreni interval (a, b) je otvoren skup u $\mathbf{R}$; međutim, ako se taj interval tretira kao podskup prostora $\mathbf{R}^2$, on očigledno nije otvoren, jer nijedna njegova tačka nema $\mathbf{R}^2$-okolinu (krug!) koja bi bila podskup od (a, b). ▲

Odnos između otvorenih (odnosno zatvorenih) skupova prostora X i njegovog potprostora X_1 daje sledeći

STAV 9.1.4

Neka je (X, d) metrički prostor i X_1 njegov potprostor. Skup $G_1 \subset X_1$ je otvoren (zatvoren) u X_1 ako i samo ako postoji otvoren (zatvoren) skup G u X, takav da je $G \cap X_1 = G_1$.

Dokaz.

Tvrđenje sledi neposredno iz činjenice da ako je $K_1(a, r)$ otvorena kugla prostora X_1 oko tačke $a \in X_1$, poluprečnika r, a $K(a, r)$ isto u prostoru X, onda je $K_1(a, r) = K(a, r) \cap X_1$. ■

9.2. KONVERGENCIJA

Kao što smo već pomenuli, uvođenje pojma okoline omogućava da se u metričkim prostorima uvede pojam limesa slično kao u skupu realnih brojeva.

Limes niza

DEFINICIJA 9.2.1

Za niz tačaka metričkog prostora (X, d) kažemo da *konvergira tački* $x \in X$ i pišemo $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ako za svaku okolinu U tačke x postoji prirodan broj n_0, takav da je $x_n \in U$ za sve prirodne brojeve n veće od n_0.

Uzimajući u obzir da su okoline u metričkom prostoru definisane pomoću kugli, zaključujemo da je x *granična vrednost* niza (x_n) ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon),$$

odnosno ako i samo ako

$$d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

PRIMERI 9.2.1

1° Neka je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}_p^k$ i $x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n)$, $n \in \mathbf{N}$, niz tačaka u $\mathbf{R}_p^k$. Dokažimo da niz (x_n) konvergira tački x ako i samo ako svaki od nizova koordinata $(x_i^n)_{n=1}^{\infty}$ konvergira odgovarajućoj koordinati x_i tačke x, $i = 1, 2, \ldots, k$. Zaista, neposredno iz stava 1.1 sledi da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ važi u $\mathbf{R}_p^k$ ako i samo ako važi u $\mathbf{R}_\infty^k$, a konvergencija u $\mathbf{R}_\infty^k$ je očigledno ekvivalentna „konvergenciji po koordinatama"

$$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

2° Ovako jednostavan odnos između konvergencije u nekom prostoru nizova i konvergencije po koordinatama ne ostaje na snazi ako posmatramo neki od prostora beskonačnih nizova. Uočimo, na primer, u prostoru c_0 nula-nizova realnih brojeva elemente

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1, \ldots), \quad \ldots .$$

Oni čine niz tačaka prostora c_0 koji očigledno ima osobinu da je $\lim_{n\to\infty} e_i^n = 0$ za svako $i = 1, 2, \ldots$. Međutim, ako sa 0 označimo element $(0, 0, 0, \ldots)$ prostora c_0, biće $d(e_n, 0) = 1$ za $n = 1, 2, \ldots$ i očigledno ne važi $\lim_{n\to\infty} d(e_n, 0) = 0$, pa ni $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$. ▲

Najjednostavnije osobine limesa nizova u metričkim prostorima izvode se potpuno analogno kao u slučaju realnih nizova. Tako, na primer, važi

STAV 9.2.1

1° *Ako niz ima graničnu vrednost, ona je jednoznačno određena.*

2° *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz.

Ilustracije radi dokažimo tvrđenje 1°. Pretpostavimo, suprotno, da postoje dve različite tačke x, $y \in X$, takve da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Označimo $\varepsilon = d(x, y)$ i posmatrajmo kugle $K(x, \varepsilon/2)$ i $K(y, \varepsilon/2)$. One su disjunktne, jer ako bi postojala tačka z koja bi pripadala i jednoj i drugoj, važilo bi

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

što nije tačno. Na taj način, očigledno je nemoguće da svaka od tih kugli sadrži skoro sve članove niza (x_n). ■

Nastavljajući pregled osobina limesa nizova u $\mathbf{R}$ koje se mogu preneti na slučaj metričkih prostora, uvodimo pojam tačke nagomilavanja niza.

DEFINICIJA 9.2.2

Za tačku x metričkog prostora X kažemo da je *tačka nagomilavanja* niza (x_n) tačaka tog prostora ako postoji podniz (x_{n_k}) tog niza koji teži ka x kad $k \to \infty$.

STAV 9.2.2

1° *Tačka $x \in X$ je tačka nagomilavanja niza (x_n) tačaka prostora X ako i samo ako za svaku okolinu U tačke x i svako $n \in \mathbf{N}$ postoji $r \in \mathbf{N}$, $r > n$, takvo da je $x_r \in U$.*

2° *Tačka $x \in X$ je tačka nagomilavanja skupa $A \subset X$ ako i samo ako postoji niz međusobno različitih elemenata $x_n \in A$ koji teži ka x.*

3° *Tačka $x \in X$ je adherentna tačka skupa $A \subset X$ ako i samo ako postoji niz (x_n) elemenata skupa A koji teži ka x.*

Dokaz.

Tvrđenja 1° i 2° dokazuju se analogno stavovima 3.2.2 i 3.2.3. Tvrđenje 3° sledi iz 2° i definicije 1.8 adherencije. ■

Limes funkcije

DEFINICIJA 9.2.3

Neka su (X, d) i (Y, d_1) metrički prostori, $A \subset X$, $f: A \to Y$ i $a \in X$ tačka nagomilavanja skupa A. Kažemo da je tačka $b \in Y$ *granična vrednost (limes)* funkcije f u tački a ako za svaku okolinu $V(b)$ tačke b postoji okolina $U(a)$ tačke a, takva da

$$(\forall x \in A)(x \in U(a), x \neq a \implies f(x) \in V(b)).$$

Kao i u slučaju realnih funkcija realne promenljive, ovoj definiciji možemo dati i sledeće ekvivalentne oblike:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff (\forall V(b))(\exists U(a))\, f\big(\mathring{U}(a)\big) \subset V(b),$$

gde smo sa $\mathring{U}(a)$ označili skup $U(a) \setminus \{a\}$, odnosno

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < d(x, a) < \delta \implies d_1(f(x), b) < \varepsilon)$$

i najzad

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{x\to a} d_1(f(x), b) = 0.$$

Slično teoremi 4.2.1 i stavovima 4.2.1 i 4.2.2 dokazuju se sledeća svojstva limesa funkcija u metričkim prostorima.

TEOREMA 9.2.1

Neka su X i Y metrički prostori, $A \subset X$, $f: A \to Y$ i $a \in X$ tačka nagomilavanja skupa A. Granična vrednost funkcije f u tački a jednaka je $b \in Y$ ako i samo ako za svaki niz (x_n), takav da $x_n \in A \setminus \{a\}$, $n \in \mathbf{N}$, i $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, važi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. ■

STAV 9.2.3

1° *Ako funkcija f ima graničnu vrednost u tački a, ona je jednoznačno određena.*

2° *Ako funkcija f ima graničnu vrednost u tački a, onda postoji okolina $U(a)$ tačke a, takva da je funkcija f ograničena na skupu $\mathring{U}(a)$, tj. da je skup $f(\mathring{U}(a)) = \{ f(x) \mid x \in \mathring{U}(a) \}$ ograničen.* ■

Takođe, teorema 4.6.1 o limesu složene funkcije ima svoj analogon u proizvoljnim metričkim prostorima.

TEOREMA 9.2.2

Neka su X, Y i Z metrički prostori; neka je dalje:

1° *$B \subset Y$, $b \in Y$ tačka nagomilavanja skupa B, $g: B \to Z$ i $\lim_{y \to b} g(y) = c$;*

2° *$A \subset X$, $a \in X$ tačka nagomilavanja skupa A, $f: A \to B$ i za svaku okolinu V tačke b postoji okolina U tačke a, takva da je $f(\mathring{U}) \subset \mathring{V}$.*

Tada je $\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = c$. ■

PRIMER 9.2.2

Neka je (X, d) proizvoljan metrički prostor, $A \subset X$ i $Y = \mathbf{R}_p^k$. Neka je $f: A \to Y$. Tada je za svako $x \in A$, $f(x)$ tačka k-dimenzionog prostora $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$; drugim rečima, definisane su funkcije $y_i = f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, gde $f_i: A \to \mathbf{R}$. Logično je postaviti pitanje o vezi granične vrednosti funkcije f i funkcija f_i u tački $a \in X$ koja je tačka nagomilavanja skupa A. Slično kao i kod nizova (primer 1.1°), lako se izvodi (ponovo korišćenjem stava 1.1) da važi

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_k) \iff \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \quad \blacktriangle$$

Posmatrajmo sada slučaj kada je *domen* funkcije f podskup k-dimenzionog prostora, tj. $f: A \to Y$, $A \subset \mathbf{R}_p^k$. Takve funkcije zvaćemo *funkcijama više (realnih) promenljivih*. Ponovo primenom stava 1.1 lako je proveriti da vrednost limesa te funkcije (ako postoji) u nekoj tački $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbf{R}_p^k$, koja je tačka nagomilavanja skupa A, ne zavisi od p, tj. sledeći iskazi su ekvivalentni:

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = b$;

(2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < d_p(x, a) < \delta \implies d(f(x), b) < \varepsilon)$ (sa d je označena metrika prostora Y);

(3) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x_i - a_i| < \delta \quad \text{za} \quad i = 1, 2 \ldots, k \implies d(f(x), b) < \varepsilon)$.

Pitanje koje se nameće u ovoj situaciji jeste da li se takav limes može odredivati „pokoordinatno", tj. da li se mogu (zadržimo se, jednostavnosti radi, na slučaju $k = 2$) umesto granične vrednosti $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$, shvaćene u smislu definicije 3, odnosno malopre navedenih uslova (2) i (3), tražiti *uzastopne* granične vrednosti $\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$, odnosno $\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)$. S tim u vezi navedimo najpre nekoliko primera.

PRIMERI 9.2.3

1° Neka je $f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}$, definisana sa $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$. Tada je $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ za $x, y \neq 0$, pa je $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 0$ i

$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 0$. Međutim, $f(x, x) = 1/2$ za $x \neq 0$, te je jasno da ne može postojati $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$. Na primer, u to se možemo lako uveriti primenom teoreme 1, posmatrajući nizove $(1/n, 0)$ i $(1/n, 1/n)$ koji teže $(0, 0)$.

2° $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. $\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 1$, $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = -1$; dakle, ovaj put uzastopni limesi postoje i različiti su, pa opet ne može postojati $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

3° Ne treba misliti, međutim, da postojanje „pravog" limesa $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ obezbeđuje postojanje i jednakost uzastopnih. Zaista, funkcija $f(x, y) = x + y \sin \dfrac{1}{x}$ ima osobinu da je $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$ (dokazati!), ali ne postoji uzastopni limes $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y)$ jer ne postoji već $\lim_{x \to 0} f(x, y)$ za $y \neq 0$. ▲

U vezi sa ovim primerima je i sledeće tvrđenje koje daje vezu između „uzastopnih" i „pravih" limesa funkcija više promenljivih.

STAV 9.2.4

Neka je $f: A \to Y$, $A \subset \mathbf{R}^2$, Y metrički prostor i $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tačka nagomilavanja skupa A. Ako

1° *postoji $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = c$;*

2° *postoji okolina $V(b)$ tačke b, takva da za svako $y \in V(b)$ postoji $\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$,*

tada postoji $\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y)$ i jednak je takođe c.

Dokaz.

Prema pretpostavci 1°, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da $0 < |x - a| < \delta$, $0 < |y - b| < \delta$ povlači

$$d(f(x, y), c) < \varepsilon \tag{1}$$

(sa d je označena metrika prostora Y). Fiksirajmo neko takvo y i pretpostavimo pri tom da je δ dovoljno malo da je ujedno i $y \in V(b)$. Prelazom na limes kad $x \to a$ u (1) (i koristeći pri tom neprekidnost funkcije rastojanja — v. zadatak 13), dobijamo $d(\varphi(y), c) \leqslant \varepsilon$, što i znači da je $\lim_{y \to b} \varphi(y) = c$. ■

POSLEDICA 9.2.1

Ako uz pretpostavke prethodnog stava važi još i

3° *postoji okolina $U(a)$ tačke a, takva da za svako $x \in U(a)$ postoji $\lim_{y \to b} f(x, y)$,*

tada postoji i $\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$ i važi

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y). \quad \blacksquare$$

9.3. KOMPLETNOST

Razvijajući teoriju konvergencije u skupu R u glavama 3 i 4, videli smo da važnu ulogu u toj teoriji ima Košijev princip konvergencije (teorema 3.3.1). Pojam Košijevog niza može se uvesti i u proizvoljnom metričkom prostoru, no kako ćemo videti, sam princip konvergencije neće uvek biti na snazi.

DEFINICIJA 9.3.1

Za niz (x_n) tačaka metričkog prostora (X, d) kažemo da je *Košijev* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ čim su indeksi m i n veći od n_0. Simbolički:

$$(x_n) \text{ je Košijev} \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m, n \in \mathbf{N})(m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon).$$

STAV 9.3.1

1° *Svaki konvergentan niz je Košijev.*

2° *Svaki Košijev niz je ograničen.*

3° *Ako Košijev niz ima konvergentan podniz, on je i sam konvergentan.*

Dokaz.

Ovaj stav dokazuje se potpuno analogno stavu 3.3.1. Ilustracije radi dokažimo tvrđenje pod 1°.

Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ i $\varepsilon > 0$ je proizvoljno. Neka je $n_0 \in \mathbf{N}$ izabrano tako da je $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ za $n > n_0$. Tada je za sve m, $n > n_0$

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je niz (x_n) Košijev. ■

Obrat dokazanog tvrđenja pod 1° ne mora da važi u proizvoljnom metričkom prostoru.

PRIMER 9.3.1

Potprostor Q prostora R je metrički prostor u kojem postoji Košijev niz koji ne konvergira. Zaista, neka je niz (a_n) zadat kao u primeru 3.3.1:

$$a_1 = 0,\alpha_1; \quad a_2 = 0,\alpha_1\alpha_2; \quad \ldots; \quad a_n = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n; \quad \ldots,$$

gde su α_i cifre. U tom primeru smo dokazali da je (a_n) Košijev niz koji konvergira realnom broju $a = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots$. Međutim, ako je broj a iracionalan (na primer, $a = \sqrt{2} - 1$), onda niz (a_n) nema limesa u prostoru Q. ▲

DEFINICIJA 9.3.2

Metrički prostor je *kompletan* ako je u njemu svaki Košijev niz konvergentan.

PRIMERI 9.3.2

1° Prema teoremi 3.3.1, prostor R je kompletan.

2° Prostor $\mathbf{R}_p^k$ je kompletan. Da bi se to dokazalo, dovoljno je: (a) uočiti da je niz tačaka $x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_k^n)$, $n \in \mathbf{N}$, Košijev u $\mathbf{R}_p^k$ ako i samo ako je svaki od nizova koordinata $(x_i^n)_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, Košijev u R; (b) iskoristiti kompletnost prostora R; (c) iskoristiti činjenicu da je konvergencija u $\mathbf{R}_p^k$ koordinatna (v. primer 2.1.1°).

3° Prostor m ograničenih nizova je kompletan. Dokaz prepuštamo čitaocu.

4° Da je prostor $C[a, b]$ neprekidnih funkcija kompletan dokazaćemo u udžbeniku Matematička analiza II.

5° Prostor $C_1[a, b]$, definisan takođe na skupu $C[a, b]$ neprekidnih funkcija integralnom metrikom

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

(v. primer 1.1.5°) nije kompletan. Određenosti radi, stavimo $[a, b] = [-1, 1]$ i posmatrajmo niz (f_n) funkcija iz $C[-1, 1]$ definisanih pomoću

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{za } -1 \leqslant x \leqslant -1/n, \\ nx, & \text{za } -1/n < x < 1/n, \\ 1, & \text{za } 1/n \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Neposredno se proverava da je taj niz Košijev u $C_1[-1, 1]$. Međutim, on nije konvergentan, jer ako bi neprekidna funkcija f bila njegov limes u metrici d_1, tada bi ona morala biti identički jednaka -1 na $[-1, 0)$ i identički jednaka 1 na $(0, 1]$, što je kontradikcija sa njenom neprekidnošću u nuli. ▲

Važnost kompletnih prostora ogleda se u mogućnosti da se u njima primenjuje Košijev princip egzistencije granične vrednosti funkcije. Naime, važi sledeće uopštenje teoreme 4.5.1, koje se i dokazuje na analogan način.

TEOREMA 9.3.1

Neka su X i Y metrički prostori, $A \subset X$, $f: A \to Y$ i $a \in X$ tačka nagomilavanja skupa A. Ako je prostor Y kompletan, tada je za postojanje granične vrednosti funkcije f u tački a neophodno i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji okolina U tačke a, takva da

$$(\forall x', x'' \in A)(x', x'' \in \mathring{U} \implies d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon). \quad ■$$

Teorema o nepokretnoj tački

DEFINICIJA 9.3.3

Neka je X skup i $f: X \to X$. Za tačku $x \in X$ kažemo da je *nepokretna tačka* preslikavanja f ako je $f(x) = x$.

U mnogim problemima analize i njenih primena važno je dokazati egzistenciju nepokretne tačke određenog preslikavanja. Jedno od tvrđenja koja se najčešće koriste u tom cilju je *Banahova* teorema o nepokretnoj tački.*

* S. Banach (1892–1945), poljski matematičar

DEFINICIJA 9.3.4

Neka je X metrički prostor i $f: X \to X$. Preslikavanje f je *kontrakcija* ako postoji realan broj q, $0 < q < 1$, takav da je

$$d(f(x), f(y)) \leqslant q \cdot d(x, y) \qquad \text{za sve } x, y \in X.$$

TEOREMA 9.3.2

Svaka kontrakcija f kompletnog metričkog prostora X u samog sebe ima tačno jednu nepokretnu tačku.

Dokaz.

Neka je x_0 proizvoljna tačka prostora X. Formirajmo niz (x_n) tačaka tog prostora pomoću $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$. Dokažimo da je taj niz konvergentan; s obzirom na pretpostavljenu kompletnost prostora X, dovoljno je dokazati da je taj niz Košijev. Označimo $a = d(x_0, x_1)$. Važi

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leqslant q \cdot d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant \cdots \leqslant q^n \cdot d(x_0, x_1) = a \cdot q^n, \end{aligned}$$

odakle, koristeći nejednakost mnogougla (v. zadatak 13), imamo za $n > m$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant d(x_m, x_{m+1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant a \cdot q^m + \cdots + a \cdot q^{n-1} \leqslant a \cdot q^m + a \cdot q^{m+1} + \cdots = a \cdot \frac{q^m}{1-q}. \end{aligned}$$

Kako poslednji izraz (zbog $0 < q < 1$) teži nuli kad $m \to \infty$, to je dokazano da je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i dovoljno velike m, n.

Označimo sa x' graničnu vrednost niza (x_n). Dokažimo da je to tražena nepokretna tačka preslikavanja f. Primetimo da važi

$$d(x_n, f(x')) = d(f(x_{n-1}), f(x')) \leqslant q \cdot d(x_{n-1}, x') \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

odakle sledi da $x_n \to f(x')$ $(n \to \infty)$. Kako takođe $x_n \to x'$ $(n \to \infty)$, to je $f(x') = x'$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo najzad jedinstvenost nepokretne tačke x'. Ako bi postojala još jedna tačka x'', takva da je $x'' = f(x'')$, bilo bi

$$d(x', x'') = d(f(x'), f(x'')) \leqslant q \cdot d(x', x''),$$

što je, zbog $0 < q < 1$, moguće jedino ako je $d(x', x'') = 0$, tj. $x' = x''$. ■

Primetimo da navedeni dokaz Banahove teoreme daje nešto više od samog njenog tvrđenja. Naime, on pokazuje da se za nalaženje nepokretne tačke x' kontrakcije f može dobiti efektivan metod — on se obično zove *metod sukcesivnih aproksimacija* — koji se sastoji u tome da se polazeći od proizvoljne tačke $x_0 \in X$ („nulte aproksimacije") formira niz $x_n = f(x_{n-1})$ koji konvergira tački x'. Drugo,

dobija se i procena greške koja se čini ako se tačno rešenje x' jednačine $f(x) = x$ zameni približnom vrednošću x_n. Ona glasi

$$d(x_n, x') \leqslant a \cdot \frac{q^n}{1-q}, \quad \text{gde je } a = d(x_0, x_1).$$

Navedimo sada nekoliko primera primene Banahove teoreme. U tim primerima koristićemo i jednostavnu činjenicu (njen dokaz prepuštamo čitaocu) da je zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora i sam kompletan.

PRIMERI 9.3.3

1° Neka je $[a, b]$ proizvoljan segment realne prave i $f: [a, b] \to [a, b]$. Pretpostavimo još da je f diferencijabilna funkcija i da je $|f'(x)| \leqslant q < 1$ za $x \in (a, b)$. Na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti odmah dobijamo da je

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant q|x_1 - x_2|$$

za sve x_1, $x_2 \in [a, b]$, što znači da je f kontrakcija. Prema Banahovoj teoremi, jednačina $f(x) = x$ ima tada u $[a, b]$ tačno jedno rešenje i ono se može odrediti metodom sukcesivnih aproksimacija.

2° Posmatrajmo sada sistem od k linearnih jednačina sa k nepoznatih $\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Napišimo ga u obliku

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1k}x_k + b_1 \\ x_2 &= -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2k}x_k + b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k &= -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \cdots + (1 - a_{kk})x_k + b_k, \end{aligned}$$

odnosno $x_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j + b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, gde je

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j, \\ 0, & \text{za } i \neq j. \end{cases}$$

Definišimo preslikavanje $f: \mathbf{R}_p^k \to \mathbf{R}_p^k$ pomoću $y = f(x)$, gde je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ i

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j + b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Nepokretna tačka tog preslikavanja biće očigledno rešenje našeg sistema. Ostaje da se proveri pod kojim uslovima je f kontrakcija. Dovoljni uslovi zavisiće od toga koji od prostora $\mathbf{R}_p^k$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, posmatramo. Na primer, ako uzmemo

$p = 2$, tj. posmatramo običan euklidski prostor $\mathbf{R}^k$, imaćemo, za $x_1 = (x_j^{(1)})$, $x_2 = (x_j^{(2)}) \in \mathbf{R}^k$ i $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$,

$$d(y_1, y_2)^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_j^{(2)} \right]^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{k} c_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)}) \right]^2$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \sum_{j=1}^{k} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2 \right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 d(x_1, x_2)^2,$$

tj.

$$d(y_1, y_2) \leqslant \left[\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij}^2 \right]^{1/2} d(x_1, x_2).$$

pa je dovoljan uslov da f bude kontrakcija u ovom slučaju $\sum\limits_{i,j=1}^{k} c_{ij}^2 < 1$. Čitaocu prepuštamo da proveri da će u slučaju $p = 1$ dovoljan uslov za kontrakciju biti

$$\sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| < 1 \qquad \text{za} \qquad j = 1, 2, \ldots, k,$$

a u slučaju $p = \infty$

$$\sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| < 1 \qquad \text{za} \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

3° Posmatrajmo sada sledeći *Košijev problem* za diferencijalnu jednačinu prvog reda: traži se funkcija $y = y(x)$ koja zadovoljava jednačinu $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ i početni uslov $y(x_0) = y_0$; ovde su x_0 i y_0 date konstante, a f data funkcija dveju promenljivih. Sledeći Pikarov* stav koji daje dovoljne uslove za egzistenciju i jedinost rešenja ovog problema najlakše se dokazuje pomoću Banahove teoreme o nepokretnoj tački.

STAV 9.3.2

Neka je

1° *funkcija $f(x, y)$ neprekidna (v. naredni odeljak) u pravougaoniku $P = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$; samim tim ona je ograničena — neka je $|f(x, y)| \leqslant M$ za $(x, y) \in P$;*

2° *$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|$ za neko $K > 0$ i sve (x, y_1), $(x, y_2) \in P$.*

Tada postoji broj $h > 0$, takav da u segmentu $\Delta = [x_0 - h, x_0 + h]$ Košijev problem $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ima jedinstveno rešenje.

* E. Picard (1856–1941), francuski matematičar

Dokaz.

Dati Košijev problem može se očigledno prepisati u obliku integralne jednačine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx$$

i potrebno je dokazati da ta jednačina ima jedno i samo jedno rešenje.

Izaberimo $h > 0$ tako da je $h < 1/K$ i $h \leqslant \min\{a, b/M\}$ i označimo $\Delta = [x_0 - h, x_0 + h]$. Posmatrajmo metrički prostor $C_\Delta = C(\Delta)$ i njegov podskup

$$A = \{ y \in C_\Delta \mid \max_{x \in \Delta} |y(x) - y_0| \leqslant b \}.$$

A je ustvari zatvorena kugla $K[y_0, b]$ prostora C_Δ i kao takav on je sam za sebe kompletan metrički prostor.

Definišimo preslikavanje $\varphi\colon A \to A$ pomoću

$$\varphi(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx \quad \text{za} \quad y \in A.$$

Proverimo najpre da φ zaista preslikava A u A. Ako je $y \in A$ i $x \in \Delta$, tada $(x, y(x)) \in P$, pa desna strana definicione relacije za φ ima smisla i očigledno je $\varphi(y) \in C_\Delta$. Dalje, važi

$$|\varphi(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

što znači da $\varphi(y) \in A$.

Dokažimo sada da je φ kontrakcija. Neka $y_1, y_2 \in A$ i $x \in \Delta$. Tada je

$$|\varphi(y_1)(x) - \varphi(y_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]\, dx \right|$$
$$\leqslant K \int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_2(x)|\, dx \leqslant Kh \cdot \max_{x \in \Delta} |y_1(x) - y_2(x)|,$$

tj.

$$d(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \leqslant q \cdot d(y_1, y_2), \qquad \text{za } y_1, y_2 \in A,$$

gde je $q = Kh < 1$.

Dakle, φ je kontrakcija kompletnog metričkog prostora A u samog sebe, pa postoji tačno jedna njegova nepokretna tačka, tj. tačno jedna funkcija $y(x)$ koja zadovoljava našu integralnu jednačinu, pa samim tim i dati Košijev problem. ■

9.4. NEPREKIDNOST

Kao i pojam granične vrednosti i pojam neprekidnosti se može uvesti u metričkim prostorima zahvaljujući postojanju okolina.

DEFINICIJA 9.4.1
Neka su X i Y metrički prostori i $f: X \to Y$. Za funkciju f kažemo da je ***neprekidna u tački*** $a \in X$ ako za svaku okolinu V tačke $f(a)$ postoji okolina U tačke a, takva da je $f(U) \subset V$.

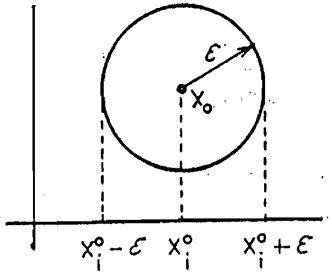
Uzimajući u obzir način na koji su uvedene okoline u metričkom prostoru, vidimo da se ovoj definiciji može dati sledeća ekvivalentna forma: funkcija f je neprekidna u $a \in X$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ čim je $d(x, a) < \delta$; simbolički zapisano:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d(x, a) < \delta \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon).$$

Kao i kod realnih funkcija realne promenljive (v. odeljak 5.1), svaka funkcija je neprekidna u izolovanoj tački svog domena. Kada su u pitanju tačke nagomilavanja domena, slično stavu 5.1.1 dokazuje se sledeća karakterizacija neprekidnosti.

STAV 9.4.1
Neka je $f: X \to Y$ preslikavanje iz metričkog prostora X u metrički prostor Y i $a \in X$ tačka nagomilavanja skupa X. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:
1° *funkcija f je neprekidna u tački a;*
2° $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;
3° *za svaki niz (x_n), $x_n \in X$, za koji je $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ važi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.* ■

PRIMERI 9.4.1
1° Neka je $X = \mathbf{R}_p^k$ i $p_i: X \to \mathbf{R}$ funkcija koja tački $x = (x_1, \ldots, x_k) \in X$ dodeljuje njenu i-tu koordinatu x_i („i-ta projekcija"). Dokažimo da je ona neprekidna u svakoj fiksiranoj tački $x_0 \in X$. Zaista, ako je $x_i^0 = p_i(x_0)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljno, dovoljno je uzeti $\delta = \varepsilon$ i uočiti kuglu $K(x_0, \delta)$ koja se projekcijom p_i očigledno preslikava u okolinu $(x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ tačke x_i^0 (v. sliku 1, gde je uzeto $k = 2$ i $p = 2$).



Sl. 9.4.1

2° Posmatrajmo sada funkciju $f: X \to \mathbf{R}_p^k$ iz proizvoljnog metričkog prostora X u prostor $\mathbf{R}_p^k$. Kao što smo videli u primeru 2.2, za svaku takvu funkciju definisane su funkcije $f_i = p_i \circ f: X \to \mathbf{R}$ koje svakoj tački $x \in X$ dodeljuju i-tu koordinatu y_i tačke $y = f(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Koristeći rezultat pomenutog primera lako je videti da je funkcija f neprekidna u nekoj tački $a \in X$ ako i samo ako su sve funkcije f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, neprekidne u toj tački.

3° Neka je sada $f: A \to Y$, gde je $A \subset \mathbf{R}_p^k$, a Y proizvoljan metrički prostor, tj. neka je f funkcija više promenljivih. Za takvu funkciju se osim pitanja o neprekidnosti u smislu definicije 1 može postaviti i pitanje o neprekidnosti po pojedinim promenljivim — za funkciju f se kaže da je *neprekidna po promenljivoj* x_i u tački $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A$ ako je ona neprekidna u tački a_i, shvaćena kao funkcija od x_i pri fiksiranim ostalim promenljivim $x_j = a_j$, $j \neq i$. Lako je videti, međutim, da funkcija f može biti neprekidna po svakoj od promenljivih ponaosob, ali da pri tom ne bude neprekidna u smislu definicije 1 — uzimajući u obzir rezultat primera 2.3.1°, dovoljno je posmatrati funkciju $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definisanu sa

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{za } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{za } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

ona je neprekidna i po promenljivoj x i po promenljivoj y u tački $(0, 0)$, ali nije neprekidna u $(0, 0)$. ▲

Prelazeći na ispitivanje osobina neprekidnih funkcija u metričkim prostorima, navodimo najpre one koje su direktna uopštenja odgovarajućih osobina neprekidnih funkcija realne promenljive iz pete glave i koja se na potpuno analogan način dokazuju.

STAV 9.4.2
Ako je funkcija $f: X \to Y$ neprekidna u tački $a \in X$, onda postoji okolina U tačke a, takva da je f ograničena na U, tj. da je skup $f(U)$ ograničen u Y. ■

STAV 9.4.3
Neka su X, Y i Z metrički prostori, $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$. Ako je f neprekidna u tački $a \in X$ i g neprekidna u tački $f(a)$, tada je složena funkcija $h = g \circ f$ neprekidna u tački a. ■

Svojstva neprekidnih funkcija iz pete glave koja zavise od algebarske strukture skupa $\mathbf{R}$, naravno, ne mogu se preneti na proizvoljne metričke prostore. No, ako je kodomen takvih funkcija euklidski prostor $\mathbf{R}_p^k$ ili čak skup $\mathbf{R}$, odgovarajuća svojstva mogu se izvesti i to ponovo na potpuno analogan način.

STAV 9.4.4
Neka je X metrički prostor. Neka su funkcije $f, g: X \to \mathbf{R}_p^k$ neprekidne u tački $a \in X$ i $\alpha: X \to \mathbf{R}$ takođe neprekidna u tački a. Tada su sledeće funkcije neprekidne u tački a: $f + g$, αf i $\|f\|$.

Dokaz.
Dokažimo samo neprekidnost funkcije $\|f\|$ u tački a. Ona sledi iz neprekidnosti funkcije f i nejednakosti

$$\big|\, \|f(x)\| - \|f(a)\| \,\big| \leqslant \|f(x) - f(a)\|. \quad ■$$

STAV 9.4.5
Neka je X metrički prostor i $f, g: X \to \mathbf{R}$ neprekidne funkcije u tački $a \in X$. Tada su i funkcije fg i f/g neprekidne u tački a (poslednja ako je $g(a) \neq 0$). ■

PRIMER 9.4.2
Realna funkcija k promenljivih $f\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, data formulom

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k},$$

gde sumiranje ide po svim indeksima $i_1, i_2, \ldots, i_k$ iz skupa $\{0, 1, \ldots, n\}$ za koje je $i_1 + i_2 + \cdots + i_k \leqslant n$ i postoje $i_1^0, i_2^0, \ldots, i_k^0$, za koje je $i_1^0 + i_2^0 + \cdots + i_k^0 = n$, zove se *polinom od k promenljivih stepena n*. Polinomi su zbirovi funkcija $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mapsto a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$ koje su neprekidne, jer su proizvodi konstantnih funkcija $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mapsto c$ i projekcija $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mapsto x_i$. Na osnovu prethodnih stavova, polinomi su takođe neprekidne funkcije. ▲

STAV 9.4.6
Neka je X metrički prostor i $f\colon X \to \mathbf{R}$ neprekidna u tački $a \in X$. Ako je $f(a) \neq 0$, tada postoji okolina U tačke a, takva da je za sve $x \in U$, $f(x)$ istog znaka kao $f(a)$. ■

Kao i kod realnih funkcija, za funkciju $f\colon X \to Y$ kažemo da je *neprekidna na skupu $A \subset X$* ako je ona neprekidna u svakoj tački tog skupa. Neprekidnim funkcijama na metričkim prostorima možemo dati sledeću važnu karakterizaciju pomoću pojmova otvorenih i zatvorenih skupova.

TEOREMA 9.4.1
Neka su X i Y metrički prostori i $f\colon X \to Y$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

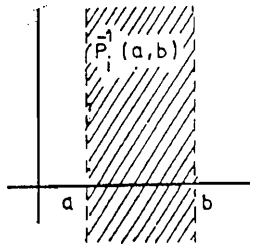
1° *f je neprekidna na X;*

2° *inverzna slika $f^{-1}(G)$ proizvoljnog otvorenog skupa $G \subset Y$ je otvoren skup u X;*

3° *inverzna slika $f^{-1}(F)$ proizvoljnog zatvorenog skupa $F \subset Y$ je zatvoren skup u X.*

Dokaz.

1° $\Longrightarrow$ 2°: Neka je f neprekidna i G otvoren skup u Y. Da bismo dokazali da je skup $f^{-1}(G)$ otvoren u X, uočimo proizvoljnu tačku $a \in f^{-1}(G)$ (ako bi skup $f^{-1}(G)$ bio prazan, tvrđenje bi bilo trivijalno). Tačka $f(a)$ pripada skupu G, a kako je on otvoren, to postoji kugla $V = K(f(a), \varepsilon)$ koja je takođe sadržana u G. Po definiciji neprekidnosti, postoji kugla $U = K(a, \delta)$, takva da je $f(U) \subset V \subset G$, što znači da je $U \subset f^{-1}(G)$. Dakle, tačka a pripada skupu $f^{-1}(G)$ zajedno sa nekom svojom δ-okolinom, što dokazuje da je skup $f^{-1}(G)$ otvoren.



Sl. 9.4.2

2° $\Longrightarrow$ 1°: Neka je uslov 2° ispunjen i neka je a proizvoljna tačka prostora X. Da bismo dokazali da je f neprekidna u a, uočimo proizvoljnu otvorenu okolinu V tačke $f(a)$. Prema pretpostavci, $U = f^{-1}(V)$ je otvoren skup koji očigledno sadrži

tačku a; dakle, U je okolina tačke a koja ima osobinu da je $f(U) \subset V$ (stav 1.3.1). Zato je f neprekidna u tački a, pa i na celom skupu X.

2° $\Longleftrightarrow$ 3°: Ovo tvrđenje sledi na osnovu definicije zatvorenih skupova kao komplemenata otvorenih i na osnovu svojstva da je inverzna slika komplementa komplement inverzne slike (zadatak 1.18). ■

PRIMER 9.4.3
Posmatrajmo ponovo primer projekcija $p_i\colon \mathbf{R}_p^k \to \mathbf{R}$. Ako je (a, b) proizvoljan otvoreni interval na $\mathbf{R}$, očigledno je $p_i^{-1}(a, b)$ otvoren skup u $\mathbf{R}_p^k$, sl. 2, što ponovo dokazuje da je p_i neprekidna funkcija $\mathbf{R}_p^k$. ▲

9.5. KOMPAKTNOST

U nekim važnim teoremama realne analize, kao što su, na primer, Vajerštrasova teorema 5.3.2 o ograničenosti neprekidne funkcije ili Kantorova teorema 5.4.1 o ravnomernoj neprekidnosti, presudnu ulogu ima određeno svojstvo segmenata realne prave koje se izražava nekom od osnovnih lema — Bolcano-Vajerštrasovom lemom 2.7.2 o tačkama nagomilavanja ili Borel-Lebegovom lemom 2.7.3 o pokrivačima. Ako želimo da slične teoreme izvedemo za funkcije u proizvoljnim metričkim prostorima, potrebno je prvo uočiti u njima one skupove koji imaju odgovarajuće svojstvo da bi mogli da posluže kao domeni takvih funkcija. Na taj način dolazimo do sledeće definicije.

DEFINICIJA 9.5.1
Za podskup K metričkog prostora X kažemo da je ***kompaktan*** ako se iz svakog pokrivača skupa K otvorenim podskupovima prostora X može izdvojiti konačan potpokrivač.

PRIMERI 9.5.1
1° Svaki konačan podskup metričkog prostora je očigledno kompaktan.

2° Svaki segment $I = [a, b]$ realne prave je kompaktan prema Borel-Lebegovoj lemi 2.7.3.

3° Uočimo u prostoru $\mathbf{R}^k$ k-dimenzioni segment (paralelopiped)

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \\ &= \{\, x = (x_i) \in \mathbf{R}^k \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \,\} = [a, b], \end{aligned}$$

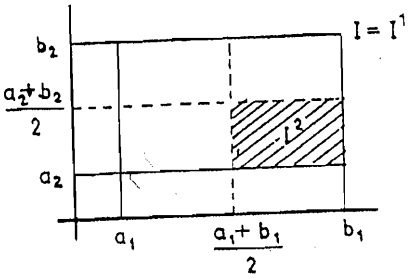
gde su $a = (a_i)$, $b = (b_i) \in \mathbf{R}^k$. Dokažimo da je taj skup kompaktan u $\mathbf{R}^k$.

Neka je $\{\, U_\alpha \mid \alpha \in A \,\}$ proizvoljan pokrivač skupa I otvorenim podskupovima U_α prostora $\mathbf{R}^k$. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da se iz njega ne može izdvojiti konačan potpokrivač. Podelimo svaki od odsečaka $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, tačkom $\frac{a_i + b_i}{2}$ na dva jednaka dela — samim tim podelimo skup $I = I^1$ na 2^k delova (v. sliku 1 za $k = 2$). Prema pretpostavci, bar jedan od tih delova je takav da se ne može prekriti sa konačno mnogo skupova U_α — označimo taj segment sa I^2.

Ponavljajući ovaj postupak dobićemo niz segmenata

$$I^1 \supset I^2 \supset \cdots \supset I^n \supset \cdots,$$

od kojih nijedan ne može biti pokriven sa konačno mnogo skupova U_α. Označimo sa $a^n = (a_1^n, \ldots, a_k^n)$, $b^n = (b_1^n, \ldots, b_k^n)$ krajeve segmenta I^n. Tada za svako $i = 1, 2, \ldots, k$ segmenti $I_i^n = [a_i^n, b_i^n]$ čine niz umetnutih odsečaka, pri čemu je dužina n-tog odsečka jednaka $(b_i - a_i)/2^{n-1}$ i teži nuli kad $n \to \infty$. Prema Kantorovom stavu 2.7.1 postoji (i jedinstvena je) tačka ξ_i koja pripada svim segmentima $[a_i^n, b_i^n]$ za $n \in \mathbf{N}$. Očigledno je tada da tačka $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ pripada svim segmentima I_n, tj. $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$.



Sl. 9.5.1

Kako je $\xi \in I$, to je $\xi \in U_\alpha$ za neko $\alpha \in A$. U otvorenom skupu U_α postoji kugla $K(\xi, d)$ koja je podskup od U_α. Međutim, za neko n biće $I^n \subset K(\xi, d) \subset U_\alpha$, pa je segment I^n pokriven sa konačno mnogo (jednim!) od skupova U_α, suprotno njegovoj konstrukciji. Ova kontradikcija dokazuje da je segment I kompaktan u $\mathbf{R}^k$. ▲

Prelazeći na izvođenje osobina kompaktnih skupova, dokažimo najpre da je, za razliku od otvorenosti i zatvorenosti, kompaktnost svojstvo koje ne zavisi od obuhvatnog prostora.

STAV 9.5.1

Podskup K metričkog prostora (X, d) je kompaktan ako i samo ako je kompaktan u sebi (tj. u metričkom potprostoru (K, d) prostora (X, d)).

Dokaz.

Tvrđenje sledi iz činjenice (stav 1.4) da je svaki otvoren skup U u prostoru K presek skupa K sa nekim otvorenim skupom V prostora X. ■

STAV 9.5.2

1° *Svaki kompaktan podskup metričkog prostora je zatvoren.*

2° *Ako je K kompaktan metrički prostor i F zatvoren podskup prostora K, tada je F kompaktan skup.*

Dokaz.

1° Da bismo dokazali da je kompaktan skup K zatvoren, dokazaćemo (v. stav 1.3) da sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Pretpostavimo, suprotno, da postoji tačka nagomilavanja a skupa K koja mu ne pripada. Za proizvoljnu tačku $x \in K$ konstruišimo okoline $U(x)$ tačke x i $V_x(a)$ tačke a, takve da je $U(x) \cap V_x(a) = \emptyset$ (to je uvek moguće — v. zadatak 10). Familija $\{ U(x) \mid x \in K \}$ čini pokrivač skupa K otvorenim skupovima $U(x)$, pa se iz nje može izdvojiti konačan potpokrivač $\{U(x_1), U(x_2), \ldots, U(x_n)\}$. Ako uočimo odgovarajuće okoline $V_{x_1}(a), V_{x_2}(a), \ldots,$

$V_{x_n}(a)$ i njihov presek označimo sa V, imaćemo očigledno da je V okolina tačke a koja nema zajedničkih tačaka sa skupom K. To je, međutim, suprotno pretpostavci da je a tačka nagomilavanja skupa K.

2° Neka je $\{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ otvoreni pokrivač skupa F. Kako je skup F zatvoren, njegov komplement $K \setminus F$ je otvoren, pa je $\{K \setminus F\} \cup \{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ otvoreni pokrivač celog prostora K. Zato postoji njegov konačan potpokrivač — on je očigledno i pokrivač skupa $F \subset K$; kako taj potpokrivač, jasno, ne može sadržati element $K \setminus F$, to smo na taj način dobili konačan potpokrivač pokrivača $\{ U_\alpha \mid \alpha \in A \}$ skupa F. Dakle, F je kompaktan skup. ■

Kombinujući ovo tvrđenje sa rezultatom primera 1.3°, dolazimo do sledeće važne posledice.

POSLEDICA 9.5.1

Podskup K prostora $\mathbf{R}^k$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.

Dokaz.

Pretpostavimo najpre da je K kompaktan skup. Prema prethodnom stavu, on je zatvoren. Dokažimo da on ne može biti neograničen. Ako bi on to bio, onda bi za proizvoljno $a \in \mathbf{R}^k$ i za svako $n \in \mathbf{N}$ postojala tačka skupa K koja ne pripada kugli $K(a, n)$. Međutim, familija $\{ K(a, n) \mid n \in \mathbf{N} \}$ je očigledno otvoreni pokrivač celog prostora, pa i skupa K, a prethodni zaključak bi značio da on nema konačnog potpokrivača.

Obrnuto, pretpostavimo da je K ograničen i zatvoren skup. On je tada podskup nekog segmenta I prostora $\mathbf{R}^k$. Taj segment je kompaktan, prema primeru 1.3°, pa zbog zatvorenosti skupa K, na osnovu prethodnog stava, sledi da je i K kompaktan. ■

Primetimo da ovaj dokaz pokazuje da su ograničenost i zatvorenost neophodni uslovi za kompaktnost i u proizvoljnom metričkom prostoru (a ne samo u $\mathbf{R}^k$); međutim, oni ne moraju biti dovoljni — odgovarajući primer navešćemo nešto kasnije (primer 2).

STAV 9.5.3

Neka su $K_1, K_2, \ldots$ neprazni kompaktni podskupovi metričkog prostora X i neka važi

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots.$$

Tada je $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ neprazan skup.

Dokaz.

Kako su K_n zatvoreni skupovi (stav 2), to su skupovi $G_n = X \setminus K_n$ otvoreni. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da je skup $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ prazan. Tada je $\{ G_n \mid n \in \mathbf{N} \}$ otvoreni pokrivač prostora X (zaista, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X \setminus \emptyset = X$), pa i skupa K_1. Zato postoji njegov konačan potpokrivač — kako su skupovi G_n rastući u smislu inkluzije, to je jasno da tada već jedan od njih, na primer, G_m (najveći iz tog potpokrivača) sadrži K_1. No, to je nemoguće jer je $K_1 \setminus G_m = K_m \neq \emptyset$. ■

Prethodni stav možemo shvatiti kao neku vrstu uopštenja Kantorovog svojstva segmenata realne prave, izraženog lemom 2.7.1 o umetnutim odsečcima. Kako su

kompaktni skupovi, po definiciji, oni koji imaju Borel-Lebegovo svojstvo, to se nameće pitanje da li za njih važi i treće osnovno svojstvo iz odeljka 2.7 — Bolcano-Vajerštrasovo. Potvrdan odgovor daje

STAV 9.5.4
Ako je metrički prostor X kompaktan, tada:
1° svaki njegov beskonačan podskup ima bar jednu tačku nagomilavanja;
2° svaki beskonačan niz u X ima podniz koji konvergira u X.

Dokaz.
Neka je A proizvoljan beskonačan podskup kompaktnog prostora X. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju 1° stava, da A nema nijednu tačku nagomilavanja. To znači da za svaku tačku $x \in X$ postoji okolina $U(x)$ koja ne sadrži nijednu tačku skupa A, osim možda same tačke x. Iz otvorenog pokrivača $\{ U(x) \mid x \in X \}$ kompaktnog prostora X izdvojmo konačan potpokrivač — on je i konačan pokrivač skupa A, a prema konstrukciji skupova $U(x)$ može sadržati najviše konačno mnogo tačaka skupa A. Dakle, skup A je konačan, suprotno pretpostavci.

Da iz svojstva 1° sledi 2° dokazuje se slično kao kod dokaza Bolcano-Vajerštrasove teoreme 3.2.1 u realnom slučaju. ■

Primetimo da su svojstva 1° i 2° iz prethodnog stava ekvivalentna, što je lako proveriti. Da bilo koje od njih povlači kompaktnost metričkog prostora X u smislu naše definicije 1, takođe je tačno, no dokaz nije jednostavan (v. npr. knjige [1], [6], [9]). Zbog toga se često i neko od tih svojstava uzima kao definiciono za pojam kompaktnog skupa u metričkom prostoru.

PRIMER 9.5.2
Posmatrajmo jediničnu sferu $S[0,1]$ prostora m ograničenih nizova, gde je $0 = (0,0,\dots)$. Ta sfera je ograničen i zatvoren skup u m. Međutim, ona nije kompaktna u m. Zaista, niz elemenata $e_n = (0,\dots,1,0,\dots)$ pripada toj sferi, ali nema konvergentnog podniza jer je $d(e_m, e_n) = 1$ za svako $m \neq n$. ▲

Kao što smo rekli u uvodu ovog odeljka, kompaktnost koristimo kada želimo da formulišemo i dokažemo uopštenja nekih od globalnih svojstava neprekidnih funkcija iz odeljaka 5.3 i 5.4.

TEOREMA 9.5.1
Neprekidna slika kompaktnog skupa je kompaktan skup.

Dokaz.
Neka je K kompaktan skup, Y metrički prostor i $f: K \to Y$ neprekidna funkcija. Uočimo proizvoljni pokrivač $\{ G_\alpha \mid \alpha \in A \}$ skupa $f(K)$ skupovima G_α koji su otvoreni u Y. Na osnovu teoreme 4.1, skupovi $f^{-1}(G_\alpha)$ su otvoreni u K, a na osnovu osobina inverzne slike (zadaci 1.18 i 1.19) familija $\{ f^{-1}(G_\alpha) \mid \alpha \in A \}$ čini pokrivač skupa K. Ako iz tog pokrivača izdvojimo konačan potpokrivač $\{ f^{-1}(G_{\alpha_i}) \mid i = 1,2\dots,n \}$, lako se vidi da će skupovi G_{α_i}, $i = 1, 2, \dots, n$, obrazovati konačan pokrivač skupa $f(K)$ koji je, prema tome, kompaktan. ■

POSLEDICA 9.5.2
Ako je K kompaktan skup u metričkom prostoru X i $f: X \to Y$ neprekidna funkcija, tada je $f(K)$ ograničen i zatvoren skup u metričkom prostoru Y. ■

POSLEDICA 9.5.3
Ako je K kompaktan metrički prostor i $f: K \to \mathbf{R}$ neprekidna realna funkcija, tada postoje tačke x, $y \in K$, takve da je

$$f(x) = \min_{t \in K} f(t) \quad i \quad f(y) = \max_{t \in K} f(t). \ ■$$

Stavljajući u ovu posledicu $K = [a,b] \subset \mathbf{R}$, dobijamo ponovo Vajerštrasovu teoremu 5.3.2.

DEFINICIJA 9.5.2
Neka su X i Y metrički prostori. Za funkciju $f: X \to Y$ kažemo da je *ravnomerno neprekidna* na X ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(d(x_1,x_2) < \delta \implies d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon).$$

PRIMERI 9.5.3
1° Sabiranje $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definisano sa $f(x,y) = x+y$, ravnomerno je neprekidna funkcija na $\mathbf{R}^2$. Zaista, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ izaberimo $\delta = \varepsilon$. Tada će za svake dve tačke $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbf{R}^2$ za koje je $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta$ (kao i kod obične neprekidnosti, irelevantno je koja od metrika d_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, u $\mathbf{R}^2$ se koristi) biti

$$d(f(x_1,y_1), f(x_2,y_2)) = |(x_1+y_1)-(x_2+y_2)| \leqslant |x_1-x_2| + |y_1-y_2| < \varepsilon.$$

2° Množenje $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definisano sa $f(x,y) = xy$, mada neprekidna, nije ravnomerno neprekidna funkcija na $\mathbf{R}^2$. To sledi iz činjenice da već kvadriranje, tj. restrikcija množenja na skup $\{ (x,x) \mid x \in \mathbf{R} \}$ nije ravnomerno neprekidno (primer 5.4.1.5°). ▲

Bez bitnih promena dokazuje se sledeće uopštenje Kantorove teoreme 5.4.1 o ravnomernoj neprekidnosti.

TEOREMA 9.5.2
Ako je K kompaktan, a Y proizvoljan metrički prostor, onda je svaka neprekidna funkcija $f: K \to Y$ ujedno i ravnomerno neprekidna na K. ■

9.6. KONEKSNOST

Za razliku od Vajerštrasove i Kantorove teoreme, Koši-Bolcanova teorema 5.3.1 o međuvrednosti takođe u svom dokazu koristi jedno svojstvo segmenata realne prave, ali ne kompaktnost, već ono što ćemo nazvati koneksnošću (povezanošću).

DEFINICIJA 9.6.1
Za metrički prostor X kažemo da je *nepovezan (diskoneksan)* ako se on može predstaviti kao unija dva svoja neprazna disjunktna otvorena podskupa,

$$X = A \cup B, \quad A, B \neq \emptyset, \quad A \cap B = \emptyset.$$

U protivnom, tj. ako se X tako ne može predstaviti, kažemo da je on *povezan (koneksan)*.

Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je koneksan ako je on koneksan, shvaćen kao metrički potprostor od X. Kao i u slučaju kompaktnosti, lako se vidi da je koneksnost svojstvo koje ne zavisi od obuhvatnog prostora.

PRIMERI 9.6.1

1° Skup $A = \{ x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0 \}$ je diskoneksan podskup prostora $\mathbf{R}$.

2° Posmatrajmo skup $D = \{0, 1\}$ kao potprostor metričkog prostora $\mathbf{R}$ sa uobičajenom metrikom d, tj.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \neq y, \\ 0, & \text{za } x = y. \end{cases}$$

Metrički prostor (D, d) je nepovezan, jer se lako vidi da su jednočlani skupovi $A = \{0\}$ i $B = \{1\}$ otvoreni u njemu, kao otvorene kugle $A = K(0, 1/2)$, $B = K(1, 1/2)$. ▲

STAV 9.6.1

Sledeća svojstva metričkog prostora X su međusobno ekvivalentna:

1° *X je koneksan;*

2° *X se ne može predstaviti kao unija dva svoja neprazna disjunktna zatvorena podskupa;*

3° *$\emptyset$ i X su jedini istovremeno otvoreni i zatvoreni podskupovi prostora X;*

4° *ne postoji neprekidno i surjektivno preslikavanje prostora X na metrički prostor (D, d) iz prethodnog primera.*

Dokaz.

Ekvivalentnost tvrđenja 1°, 2° i 3° je neposredna posledica definicije zatvorenih skupova. Dokažimo da je tvrđenje 1° ekvivalentno sa 4°, time što ćemo dokazati ekvivalentnost njihovih negacija.

Ako je prostor X diskoneksan, $X = A \cup B$, gde su A i B neprazni, disjunktni i otvoreni podskupovi od X, definišimo preslikavanje $f : X \to D$ sa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \in A, \\ 1, & \text{za } x \in B. \end{cases}$$

Zbog $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = B$, vidimo da je inverzna slika svakog otvorenog skupa iz D otvorena u X, pa je funkcija f neprekidna.

Obrnuto, ako funkcija f sa opisanim svojstvima postoji, tada su skupovi $f^{-1}(0)$ i $f^{-1}(1)$ otvoreni u X, disjunktni i neprazni i njihova unija je jednaka X, pa je taj prostor diskoneksan. ■

Sledeće tvrđenje potpuno određuje klasu koneksnih podskupova prostora $\mathbf{R}$.

STAV 9.6.2

Neprazan podskup X prostora $\mathbf{R}$ je koneksan ako i samo ako za svaka dva elementa $x, z \in X$ i svaki realan broj y za koji je $x < y < z$ važi $y \in X$. Drugim rečima, u $\mathbf{R}$ su jedini povezani skupovi intervali (konačni ili beskonačni, otvoreni, poluotvoreni ili zatvoreni).

Dokaz.

Pretpostavimo najpre da je X povezan podskup u $\mathbf{R}$ i, suprotno tvrđenju, da postoje tačke $x, y, z \in \mathbf{R}$, takve da je $x < y < z$, $x, z \in X$, a $y \notin X$. Označimo $A = \{ a \in X \mid a < y \}$, $B = \{ a \in X \mid a > y \}$. Tada $x \in A$ i $z \in B$, tj. skupovi A i B su neprazni; oni su očigledno disjunktni i $A \cup B = X$ (jer $y \notin X$). Pored toga, oni su otvoreni u X, kao preseci otvorenih skupova $(-\infty, y)$, odnosno $(y, +\infty)$, sa X. Na taj način, skup X je diskoneksan, suprotno pretpostavci.

Obrnuto, pretpostavimo da je uslov stava ispunjen i da skup X nije povezan, tj. da postoje neprazni, zatvoreni i disjunktni podskupovi A i B skupa X za koje je $A \cup B = X$. Neka su, dalje, x i z proizvoljni elementi skupova A, odnosno B. Oni se ne mogu poklopiti zbog disjunktnosti tih skupova; pretpostavimo, određenosti radi, da je $x < z$. Skup $A \cap [x, z]$ je neprazan i ograničen odozgo, pa ima supremum — označimo ga sa y_1. Očigledno je $x \leqslant y_1 \leqslant z$, pa po pretpostavci važi $y_1 \in X$. Kako je skup A zatvoren u X, to i $y_1 \in A$.

Analogno, označimo $y_2 = \inf(B \cap [y_1, z])$ i biće $y_2 \in B$. Zbog disjunktnosti skupova A i B ne može biti $y_1 = y_2$, pa važi $x \leqslant y_1 < y_2 \leqslant z$. Izaberimo proizvoljnu tačku y, takvu da je $y_1 < y < y_2$; po definiciji brojeva y_1 i y_2, tačka y ne može pripadati ni skupu A ni skupu B, pa ni njihovoj uniji X, što je kontradikcija. ■

DEFINICIJA 9.6.2

Neka je $I = [0, 1]$ jedinični segment realne prave. Ako za svake dve tačke x, y metričkog prostora X postoji neprekidno preslikavanje (put) $\alpha : [0, 1] \to X$, takvo da je $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$, kažemo da je prostor X *linearno koneksan (putno povezan)*.

STAV 9.6.3

Svaki linearno koneksan metrički prostor je koneksan.

Dokaz.

Pretpostavimo da je prostor X linearno koneksan i, suprotno tvrđenju, da postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to D$ koje je surjektivno (v. stav 1). Uočimo proizvoljne dve tačke $x \in f^{-1}(0)$ i $y \in f^{-1}(1)$. Neka je $\alpha : [0, 1] \to X$ put koji spaja tačke x i y. Funkcija $f \circ \alpha : [0, 1] \to D$ je neprekidna i surjektivna (jer je $f \circ \alpha(0) = f(x) = 0$ i $f \circ \alpha(1) = f(y) = 1$), pa sledi (opet prema stavu 1) da je segment $[0, 1]$ nepovezan, što je kontradikcija. ■

PRIMERI 9.6.2

1° Sfera $S(0, r)$, $r > 0$, prostora $\mathbf{R}^2$ (tj. krug $x^2 + y^2 = r^2$) je putno povezan, dakle i povezan skup. Naime, bilo koje dve tačke tog kruga mogu se spojiti odgovarajućim lukom tog kruga $x = r \cos 2\pi t$, $y = r \sin 2\pi t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

2° Kugla $K(a, r)$, $a \in \mathbf{R}^k$, $r > 0$, prostora $\mathbf{R}^k$ je takođe linearno koneksan skup. U stvari, ona je, više od toga, *konveksan* skup, jer se bilo koje dve njene tačke b i c mogu spojiti *pravolinijskim* putem čija je parametarska jednačina

$$x(t) = tc + (1 - t)b, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Zaista, očigledno je da je $x(0) = b$, $x(1) = c$, tj. tačke b i c su krajevi tog puta, a

da svaka njegova tačka pripada kugli $K(a,r)$ sledi iz

$$\|x(t)-a\| = \|t(c-a)+(1-t)(b-a)\|$$
$$\leqslant t\|c-a\|+(1-t)\|b-a\| < tr+(1-t)r = r. \quad \blacktriangle$$

TEOREMA 9.6.1

Ako je $f: X \to Y$ neprekidna funkcija i X povezan metrički prostor, tada je slika $f(X)$ povezan skup u Y.

Dokaz.

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $f(X) = Y$. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da je Y nepovezan, tj. (v. stav 1) da postoji pravi neprazan podskup A prostora Y koji je istovremeno otvoren i zatvoren. Tada je $f^{-1}(A)$ otvoreno-zatvoren podskup prostora X, pa mora biti jednak $\emptyset$ ili X. U prvom slučaju bi bilo $A = \emptyset$, a u drugom $A = Y$; no, oboje je isključeno izborom skupa A. Ova kontradikcija dokazuje teoremu. ■

POSLEDICA 9.6.1

Neka je X povezan metrički prostor i $f: X \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Ako su a i b proizvoljni elementi skupa vrednosti $f(X)$ funkcije f i c proizvoljna tačka između brojeva a i b, tada postoji $x \in X$, takvo da je $f(x) = c$.

Dokaz.

Prema teoremi, $f(X)$ je povezan skup u $\mathbf{R}$, dakle interval na osnovu stava 2. Odatle sledi tvrđenje. ■

Specijalno, ako za X uzmemo segment realne prave, ova posledica svodi se na Koši-Bolcanovu teoremu 5.3.1 o međuvrednosti.

PRIMER 9.6.3

Neka je I segment realne prave i $f: I \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Dokažimo da je tada njen grafik $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ povezan skup u $\mathbf{R}^2$. Zaista, $G(f)$ se može shvatiti kao slika segmenta I funkcijom $x \mapsto (x, f(x))$, koja je neprekidna jer su neprekidne funkcije $x \mapsto x$ i $x \mapsto f(x)$. ▲

Ubuduće ćemo uglavnom posmatrati putno povezane prostore, pa ćemo ih kratko nazivati povezanim.

ZADACI

1. Pod *dijametrom* skupa A u metričkom prostoru (X,d) podrazumevamo broj $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$. Dokazati:

1° $\delta(A) = 0$ ako i samo ako je A najviše jednočlan skup; 2° $A \subset B \implies \delta(A) \leqslant \delta(B)$; 3° $A \cap B \neq \emptyset \implies \delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$; 4° skup je ograničen ako i samo ako ima konačan dijametar; 5° $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

2. Neka su A i B podskupovi metričkog prostora (X,d). *Rastojanje skupova* A i B je broj $d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y)$. Specijalno, rastojanje tačke x od skupa A je broj $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$. Dokazati:

1° $d(x,A) = 0 \iff x \in \overline{A}$; 2° $|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$; 3° funkcija $f(x) = d(x,A)$ je ravnomerno neprekidna na X; 4° $\{x \mid d(x,A) < \varepsilon\}$ je otvoren; $\{x \mid d(x,A) \leqslant \varepsilon\}$ je zatvoren; 5° $d(A,B) \leqslant \delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$; 6° $d(A,B) = d(\overline{A},\overline{B})$; 7° navesti primer disjunktnih zatvorenih skupova A, B za koje je $d(A,B) = 0$.

3. Dokazati sledeće osobine adherencije:

1° $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži A, tj. $\overline{A} = \bigcap\{F \mid F \supset A, F \text{ zatvoren}\}$; 2° $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; 3° $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$; 4° $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; 5° $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$; 6° navesti primer za $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4. Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A u metričkom prostoru X zvaćemo *unutrašnjošću* skupa A i označavati sa A°. Dokazati:

1° A° je najveći otvoren skup koji je sadržan u A, tj. $A^\circ = \bigcup\{G \mid G \subset A, G \text{ otvoren}\}$; 2° A je otvoren $\iff A = A^\circ$; 3° $A^{\circ\circ} = A^\circ$; 4° $A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ$; 5° $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$; 6° navesti primer za $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$; 7° $\complement\overline{A} = (\complement A)^\circ$, $\complement(A^\circ) = \overline{\complement A}$.

5. *Granica* skupa A u metričkom prostoru X je skup ∂A svih njegovih graničnih tačaka. Dokazati:

1° ∂A je zatvoren skup; 2° $x \in \partial A \iff (\forall \varepsilon > 0)(K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ i } K(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset)$; 3° $\partial A = \partial(X \setminus A)$; 4° $A \cup \partial A = \overline{A}$; 5° $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$; 6° $A \setminus \partial A = A^\circ$; 7° $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$; 8° $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$; 9° $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$; 10° $\partial(A \setminus B) \subset \partial A \cup \partial B$.

6. Neka je X metrički prostor i A, B njegovi podskupovi. Za skup A kažemo da je *gust* u skupu B ako je $\overline{A} \supset B$. Specijalno, ako je A gust u X (tj. $\overline{A} = X$), kažemo da je A *svuda gust*. Dokazati:

1° $\mathbf{Q}$ je gust u $\mathbf{R}$; $\mathbf{Q}^k$ je gust u $\mathbf{R}^k$; 2° ako je A gust u B i B gust u C, tada je A gust u C; 3° ako su A i B svuda gusti, $A \cap B$ to ne mora biti.

7. Prostor X je *separabilan* ako u njemu postoji prebrojiv svuda gust skup. Dokazati da su prostori $\mathbf{R}^k$, c_0 i c separabilni, a da prostor m to nije.

8. Neka je X skup i d_1, d_2 dve metrike na X. Dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

1° za svaku otvorenu kuglu $K(a,r_1)$ prostora (X,d_1) postoji otvorena kugla $K(a,r_2)$ prostora (X,d_2), takva da je $K(a,r_2) \subset K(a,r_1)$ i obrnuto;

2° podskup od X je otvoren (zatvoren) u (X,d_1) ako i samo ako je otvoren (zatvoren) u (X,d_2);

3° niz (x_n) tačaka iz X konvergira ka $x \in X$ u (X,d_1) ako i samo ako konvergira ka x u (X,d_2);

4° postoje pozitivni brojevi α, β, takvi da je $\alpha < \dfrac{d_1(x,y)}{d_2(x,y)} < \beta$ za sve $x \neq y$;

5° identička preslikavanja iz (X,d_1) u (X,d_2) i obrnuto su neprekidna.

Za metrike d_1 i d_2 koje imaju neko od navedenih svojstava kažemo da su *ekvivalentne*.

9. 1° Dokazati da su sve metrike d_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, na $\mathbf{R}^k$ međusobno ekvivalentne (v. prethodni zadatak).

2° Neka je (X,d) metrički prostor. Dokazati da su sa $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ i $d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ definisane metrike d_1 i d_2 na X koje su ekvivalentne sa d. Pri tom je ceo prostor X ograničen skup u metrikama d_1 i d_2 (dok to nije morao biti u metrici d).

10. Dokazati da u svakom metričkom prostoru X važi:

1° ako $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, tada postoje disjunktni otvoreni skupovi $G_1 \ni x_1$, $G_2 \ni x_2$;

2° ako je F zatvoren podskup od X i $x \notin F$, tada postoje disjunktni otvoreni skupovi $G_1 \ni x$ i $G_2 \supset F$;

3° ako su F_1 i F_2 disjunktni zatvoreni skupovi u X, tada postoje disjunktni otvoreni skupovi $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$.

11. Navesti primer: 1° beskonačne familije otvorenih skupova čiji presek nije otvoren skup; 2° beskonačne familije zatvorenih skupova čija unija nije zatvoren skup.

12. Adherencija otvorene kugle $K(a,r)$ ne mora da se poklopi sa zatvorenom kuglom $K[a,r]$. Navesti primer.

13. 1° Dokazati nejednakost mnogougla u metričkom prostoru:

$$d(x_1,x_n) \leqslant d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n).$$

2° Dokazati da je metrika neprekidna funkcija u sledećem smislu: za svaka dva niza (x_n), (y_n) za koja je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ važi $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$.

14. U skupu $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ definišimo $\dfrac{1}{\infty} = 0$ i $d(m,n) = \left|\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right|$ za m, $n \in \mathbf{N}^*$. Dokazati:

1° d je metrika u $\mathbf{N}^*$; 2° tačka ∞ je tačka nagomilavanja skupa $\mathbf{N}$ u $\mathbf{N}^*$; 3° niz $x\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ima konačnu graničnu vrednost ako i samo ako postoji $\lim_{n\to\infty} x(n)$, shvaćen kao granična vrednost funkcije x iz podskupa metričkog prostora $(\mathbf{N}^*,d)$ u metrički prostor $\mathbf{R}$ sa uobičajenom metrikom.

15. Ako je $f\colon X \to Y$ ravnomerno neprekidna funkcija i (x_n) Košijev niz u X, dokazati da je $(f(x_n))$ Košijev niz u Y.

16. 1° Metrički prostor je kompletan ako i samo ako presek svakog monotono opadajućeg niza zatvorenih kugli u njemu, čiji niz poluprečnika teži nuli, sadrži tačno jednu tačku prostora. Dokazati.

2° U sledećem primeru pokazuje se da je uslov konvergencije poluprečnika ka nuli u prethodnom tvrđenju bitan čak i za egzistenciju pomenute tačke preseka. Neka je $\mathbf{N}$ skup prirodnih brojeva i d metrika na $\mathbf{N}$ definisana sa $d(m,n) = 1 + \dfrac{1}{m+n}$ za $m \neq n$, $d(m,m) = 0$. Kugle $K\left[n, 1+\dfrac{1}{2n}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$, imaju prazan presek, mada su umetnute jedna u drugu, a prostor $(\mathbf{N},d)$ je kompletan.

17. Pokazati da Banahova teorema o nepokretnoj tački može da ne važi ako se umesto uslova da je f kontrakcija stavi uslov $d(f(x_1),f(x_2)) < d(x_1,x_2)$ za x_1, $x_2 \in X$.

18. Pokazati da Banahova teorema o nepokretnoj tački važi ako se zahteva samo da je neka iteracija $f^{(n)}$ funkcije f kontrakcija.

19. Posmatrajmo Fredholmovu* integralnu jednačinu

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt + g(x),$$

gde je jezgro $K(x,t)$ neprekidno u kvadratu $P = [a,b] \times [a,b]$, funkcija $g(x)$ je neprekidna na $[a,b]$, $\lambda \in \mathbf{R}$, a $y(x)$ je nepoznata funkcija koju treba odrediti. Primenjujući Banahovu teoremu dokazati da ako je $\lambda < 1/M(b-a)$, gde je $M = \max_{(x,t)\in P} |K(x,t)|$, tada data jednačina ima jedinstveno rešenje $y(x)$.

20. Dokazati da su za funkciju $f\colon X \to Y$ između metričkih prostora X i Y sledeća svojstva ekvivalentna: 1° f je neprekidna na X; 2° $(\forall A \subset X)\, f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$; 3° $(\forall B \subset Y)\, f^{-1}(B^\circ) \subset [f^{-1}(B)]^\circ$.

21. Neka je $f\colon X \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na metričkom prostoru X i $c > 0$. Dokazati da je skup $\{x \mid f(x) < c\}$ otvoren, a da su skupovi $\{x \mid f(x) \leqslant c\}$ i $\{x \mid f(x) = c\}$ zatvoreni.

22. Neka su f i g neprekidne funkcije iz metričkog prostora X u metrički prostor Y. Dokazati:

1° $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ je zatvoren; 2° ako je $f(x) = g(x)$ za $x \in A \subset X$, onda je i $f(x) = g(x)$ za $x \in \overline{A}$; 3° ako je $f(x) = g(x)$ u tačkama nekog svuda gustog skupa A, onda je $f(x) = g(x)$ na X.

23. Slika otvorenog (zatvorenog) skupa neprekidnom funkcijom ne mora biti otvoren (zatvoren) skup. Navesti primer.

24. Neka je X metrički prostor i $A \subset X$. Karakteristična funkcija $\chi_A\colon X \to \mathbf{R}$ skupa A je neprekidna ako i samo ako je A otvoreno-zatvoren skup u X. Dokazati.

25. Dokazati da funkcija $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, data sa $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, za $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, nije neprekidna u $(0,0)$, mada je njena restrikcija na proizvoljnu pravu $y = tx$ kroz koordinatni početak neprekidna u njemu.

26. Neka je $f\colon A \to \mathbf{R}^n$, gde je $A \subset \mathbf{R}^m$ i neka je $G(f) \subset \mathbf{R}^{m+n}$ njen grafik. Dokazati:

1° ako je f neprekidna, tada je $G(f)$ zatvoren skup;

2° ako je A kompaktan, tada je f neprekidna ako i samo ako je $G(f)$ kompaktan;

3° neka je $x_0 \in \overline{A}$; važi $y = \lim_{x\to x_0} f(x)$ ako i samo ako je (x_0,y) jedina tačka u $\mathbf{R}^{m+n}$ sa prvom koordinatom x_0 koja je adherentna za skup $G(f)$;

4° ako je A povezan i f neprekidna, tada je $G(f)$ povezan; obrnuto ne važi: $G(f)$ može biti povezan i ako f nije neprekidna (primer: $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin 1/x$, $f(0) = 0$).

---

* I. Fredholm (1866–1927), švedski matematičar

27. Neka je $f: X \to Y$ neprekidna bijekcija. Ako je X kompaktan, tada je i $f^{-1}: Y \to X$ takođe neprekidna. Dokazati.

28. Dokazati da je svaki kompaktan metrički prostor kompletan, a da obrnuto ne mora da važi.

29. Neka je (X, d) metrički prostor i A, B neprazni podskupovi od X. Dokazati:

1° ako je A kompaktan, tada postoji $x \in A$ tako da je $d(a, B) = d(A, B)$;

2° ako su A i B kompaktni, tada je $d(a, b) = d(A, B)$ za neke $a \in A$, $b \in B$;

3° ako su A i B disjunktni kompaktni, tada je $d(A, B) > 0$;

4° ako je A kompaktan, tada je $\delta(A) = d(a_1, a_2)$ za neke $a_1, a_2 \in A$.

30. Dokazati: 1° unija nedisjunktnih koneksnih skupova je koneksan skup; 2° presek koneksnih skupova ne mora biti koneksan skup; 3° ako je A koneksan, tada je koneksan i svaki skup B za koji je $A \subset B \subset \overline{A}$; specijalno, adherencija koneksnog skupa je koneksan skup.

31. Neka je X metrički prostor, $f: X \to \mathbf{R}$ i $\omega(f, A)$ oscilacija funkcije f na skupu $A \subset X$ (v. definiciju 4.5.1). Dokazati:

1° Za $a \in X$ i $\delta > 0$, funkcija $\delta \mapsto \omega(f, K[a, \delta])$ je rastuća i ograničena odozdo funkcija od δ. Na taj način, postoji $\lim_{\delta \to +0} \omega(f, K[a, \delta]) = \omega(f, a)$ koji se naziva *oscilacijom funkcije f u tački a*.

2° Funkcija f je neprekidna u tački $a \in X$ ako i samo ako je $\omega(f, a) = 0$.

3° Za svako $\lambda > 0$ skup $X_\lambda = \{ x \in X \mid \omega(f, x) \geqslant \lambda \}$ je zatvoren.

4° Neka je X kompaktan, f ograničena i neka postoji $\omega_0 > 0$, tako da je $\omega(f, a) \leqslant \omega_0$ za svako $a \in X$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $\omega(f, D) < \omega_0 + \varepsilon$ čim je $D \subset X$ takav da je $\delta(D) < \delta$.

32. Neka je X metrički prostor, $f: X \to \mathbf{R}$ i $\delta > 0$. *Modul neprekidnosti* funkcije f je broj $\omega_f(\delta) = \sup\{ |f(x_1) - f(x_2)| \mid x_1, x_2 \in X, d(x_1, x_2) < \delta \}$. Dokazati:

1° $\delta_1 < \delta_2 \implies \omega_f(\delta_1) \leqslant \omega_f(\delta_2)$; 2° $\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2)$; 3° $\omega_f(c\delta) \leqslant c\omega_f(\delta)$ za $c > 0$; 4° funkcija f je ravnomerno neprekidna na X ako i samo ako je $\lim_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$.

10. REDOVI

10.1. POJAM I SVOJSTVA BROJNOG REDA

Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ niz realnih brojeva. Izraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{1}$$

naziva se *beskonačnim realnim redom* s *opštim članom* a_n, ili kraće *realnim redom*. Zbirovi

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

nazivaju se *parcijalnim zbirovima* ili *parcijalnim sumama* reda (1).

Definicija 10.1.1

Ako postoji konačan limes $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ niza $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ parcijalnih suma reda (1), onda se kaže da taj red *konvergira* i da mu *zbir* iznosi s. U tom slučaju se piše $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Taj zapis se koristi i kada je $\lim_{n \to \infty} s_n = \pm\infty$. Za red koji ne konvergira (bilo da je $\lim_{n \to \infty} s_n$ beskonačan, bilo da ne postoji) kaže se da *divergira*.

Primeri 10.1.1

1° Red $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$, gde je $a \neq 0$, $q \neq 0$, naziva se *geometrijskim redom*. Parcijalna suma s_n tog reda iznosi

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1},$$

odnosno

$$s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q},$$

ako je $q \neq 1$. Odavde vidimo da je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ za $|q| < 1$. Ako je $|q| \geqslant 1$, geometrijski red divergira.

Specijalno, red $1-1+1-1+\cdots$ divergira. Naime, za njegove parcijalne sume imamo

$$s_n = \underbrace{1-1+1-\cdots\pm 1}_{n} = \begin{cases} 1, & \text{za } n \text{ neparno,} \\ 0, & \text{za } n \text{ parno.} \end{cases}$$

2° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ može se napisati u obliku $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(n+1)-\ln n)$, pa je $s_n = \ln(n+1)$, odakle je $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Dakle, dati red divergira. ▲

Uporedo s redom (1) posmatrajmo red

$$(2) \qquad a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}, \qquad m \in \mathbf{N}.$$

Ovaj red ćemo nazivati *ostatkom* reda (1) posle m-tog člana i označavati sa r_m.

STAV 10.1.1

1° Red (1) konvergira ako i samo ako konvergira red (2).

2° Red (1) konvergira ako i samo ako njegov ostatak r_m teži nuli kad $m \to \infty$.

Dokaz.

1° Parcijalnu sumu $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ reda (1) označimo sa s_m, a parcijalnu sumu $a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}$ reda (2) označimo sa s'_k. Očito je

$$s'_k = s_{m+k} - s_m.$$

Ako je $\lim_{k\to\infty} s_{m+k} = s$, onda je $\lim_{k\to\infty} s'_k = s - s_m$. Iz $\lim_{k\to\infty} s'_k = s'$ sledi $\lim_{k\to\infty} s_{m+k} = s' + s_m$.

2° Red $a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots$ napišimo u obliku $s_m + r_m$. Ako taj red konvergira i ima zbir s, imamo $r_m = s - s_m$, odakle je

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty}(s - s_m) = 0.$$

Obrnuto, ako ostatak r_m teži nuli za $m \to \infty$, iz prvog dela stava sledi da red (1) konvergira. ■

Iz ovog stava lako se zaključuje da odbacivanje konačnog broja članova nekog reda ne utiče na njegovu konvergenciju.

Navedimo opšti Košijev kriterijum za konvergenciju reda.

TEOREMA 10.1.1

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da iz $n > n_0$, $p \in \mathbf{N}$ sledi $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Simbolički zapisano:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{konvergira} \iff$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n, p \in \mathbf{N})(n > n_0 \implies |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon).$$

Dokaz.

Sledi neposredno iz teoreme 3.3.1. ■

Za date redove $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, red $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ nazvaćemo njihovim *zbirom*.

STAV 10.1.2

1° Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, $c \in \mathbf{R}$. Pri tom je $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2° Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju, onda konvergira i njihov zbir. Pri tom je $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dokaz.

1° Označimo $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $S_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$. Iz egzistencije granične vrednosti $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ sledi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c\lim_{n\to\infty} s_n = cs.$$

2° Neka je $s'_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $s''_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ i $\lim_{n\to\infty} s'_n = s'$, $\lim_{n\to\infty} s''_n = s''$. Označimo

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n).$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[(a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)] = \lim_{n\to\infty} s'_n + \lim_{n\to\infty} s''_n = s' + s''. \quad ■$$

STAV 10.1.3

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, onda je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz.

Iz jednakosti $s_n - s_{n-1} = a_n$, $n > 1$, sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0. \quad ■$$

Da navedeni neophodan uslov konvergencije reda nije i dovoljan, pokazaćemo sledećim primerom.

PRIMER 10.1.2

Opšti član reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ teži nuli. No, za parcijalni zbir $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ važi nejednakost

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Očito, $\sqrt{n} \to \infty$ za $n \to \infty$, pa je $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. ▲

10.2. REDOVI S POZITIVNIM ČLANOVIMA

Za red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

kažemo da je *red s pozitivnim članovima* ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \geqslant 0$ za $n \geqslant n_0$. Kod ovih redova niz $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ parcijalnih suma je rastući za $n \geqslant n_0$, pa na osnovu teoreme 3.4.1 imamo

STAV 10.2.1

Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako je niz* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *njegovih parcijalnih suma ograničen.* ■

PRIMER 10.2.1

Pokažimo da je *harmonijski red*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

divergentan. U tom cilju primetimo najpre da je

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Grupišimo članove reda na sledeći način:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \cdots.$$

Kako je, prema gornjoj nejednakosti,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2},$$

to je 2^k-ta parcijalna suma s_{2^k} harmonijskog reda veća od $k \cdot \frac{1}{2}$. Niz $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je zato neograničen, pa taj red divergira. ▲.

Posmatrajmo sada dva reda s pozitivnim članovima — red (1) i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \tag{2}$$

TEOREMA 10.2.1

Neka za članove redova (1) i (2) za neko $n_0 \in \mathbb{N}$ *važe nejednakosti* $a_n \leqslant b_n$ *za* $n \geqslant n_0$. *Tada iz konvergencije reda (2) sledi konvergencija reda (1), a iz divergencije reda (1) sledi divergencija reda (2).*

Dokaz.

Na osnovu stava 1.1, bez ograničenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $n_0 = 1$.

Parcijalne sume reda (1), odnosno (2), označimo sa s'_n, odnosno s''_n. Neka je $\lim_{n\to\infty} s''_n = s'' \in \mathbb{R}$. Iz nejednakosti $a_n \leqslant b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sledi da je $s'_n \leqslant s''_n \leqslant s''$. Dakle, niz (s'_n) je rastući i ograničen odozgo, te postoji $\lim_{n\to\infty} s'_n$.

Drugo tvrđenje teoreme je ekvivalentno prvom, kao njegova kontrapozicija. ■

TEOREMA 10.2.2

Neka postoji $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 \leqslant K \leqslant \infty$, *gde su* a_n *i* b_n *članovi redova (1) i (2). Ako je* $K < \infty$, *onda iz konvergencije reda (2) sledi konvergencija reda (1). Ako je* $K > 0$, *iz divergencije reda (2) sledi divergencija reda (1).*

Dokaz.

Neka je $K < \infty$ i neka red (2) konvergira. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\left|\frac{a_n}{b_n} - K\right| < \varepsilon$ za $n > n_0$, odakle je

$$0 < a_n < (K + \varepsilon) b_n, \qquad \text{za } n > n_0.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} (K + \varepsilon) b_n$, prema stavu 1.2, konvergira, to prema teoremi 1 i red (1) konvergira.

Ako je $K > 0$ i red (2) divergira, onda divergira i red (1). Naime, pretpostavimo suprotno, da red (1) konvergira. Zbog $K > 0$ važi jednakost $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{K} < \infty$. Na osnovu dokazanog dela teoreme, konvergira i red (2). Kontradikcija. ■

TEOREMA 10.2.3

Neka za članove redova (1) i (2) za neko $n_0 \in \mathbb{N}$ *važe nejednakosti*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{za} \quad n \geqslant n_0.$$

Tada iz konvergencije reda (2) sledi konvergencija reda (1), a iz divergencije reda (1) sledi divergencija reda (2).

Dokaz.

Kao i u dokazu teoreme 1, možemo pretpostaviti da je $n_0 = 1$.

Iz pretpostavke teoreme sledi da važe nejednakosti

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Odavde sledi

$$a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_n \qquad \text{i} \qquad \frac{b_1}{a_1} a_n \leqslant b_n.$$

Ako konvergira red (2), konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$, dakle i red (1). Ako divergira red (1), onda divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_1}{a_1} a_n$, dakle i red (2). ■

PRIMERI 10.2.2

1° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $a > 0$, konvergira za $a > 1$. Naime, važi nejednakost

$$\frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad 0 < \frac{1}{a} < 1,$$

a geometrijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n$ konvergira.

2° Pokažimo da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, $\alpha > 0$, konvergira.

Posmatrajmo red $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$. Na funkciju $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ primenimo Lagranžovu teoremu o srednjoj vrednosti na segmentu $[n-1, n]$; dobija se jednakost

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(n-\theta)^{\alpha+1}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Odavde je

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Parcijalne sume s_n reda $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ su oblika $s_n = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$, pa je ovaj red konvergentan. Dakle, i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ konvergira.

3° Red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira.

Naime, uočimo najpre da red $\sum_{n=2}^{\infty} [\ln\ln(n+1) - \ln\ln n]$ divergira, jer niz $(s_n)_n$ parcijalnih suma divergira ($s_n = \ln\ln(n+1) - \ln\ln 2$). Na funkciju $f(x) = \ln\ln x$ primenimo Lagranžovu teoremu na segmentu $[n, n+1]$. Dobijamo

$$\ln\ln(n+1) - \ln\ln n = \frac{1}{(n+\theta)\ln(n+\theta)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Odavde je $\ln\ln(n+1) - \ln\ln n < \frac{1}{n \ln n}$, što dokazuje tvrđenje. ▲

Osim gornjih stavova, u cilju ispitivanja konvergencije redova s pozitivnim članovima koriste se i neki stavovi koji daju dovoljne uslove za konvergenciju, odnosno divergenciju, tzv. kriterijumi konvergencije. Navešćemo nekoliko takvih kriterijuma.

STAV 10.2.2 *(Dalamberov* kriterijum)*

1° *Ako za red (1) postoje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i* $q \in \mathbb{R}$, *tako da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \quad za \quad n \geqslant n_0,$$

onda on konvergira. Ako pak postoji $n_0' \in \mathbb{N}$, *tako da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \quad za \quad n \geqslant n_0',$$

onda red (1) divergira.

2° *Neka za članove reda (1) postoji* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Za* $l < 1$ *red (1) konvergira, a za* $l > 1$ *on divergira.*

Dokaz.

1° Iz nejednakosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, $n \geqslant n_0$, dobijamo

$$a_{n_0+1} \leqslant a_{n_0} q, \quad a_{n_0+2} \leqslant a_{n_0} q^2, \quad \ldots, \quad a_{n_0+k} \leqslant a_{n_0} q^k, \quad \ldots$$

Kako red $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0} q^k$ konvergira, to konvergira i red $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$. Dakle, konvergira i red (1).

Ako je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ za $n \geqslant n_0'$, onda opšti član a_n ne teži nuli, pa red (1) divergira na osnovu stava 1.3.

2° Neka je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$ i $0 < \varepsilon < 1 - l$. Označimo $q = l + \varepsilon$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$ za $n \geqslant n_0$. Na osnovu dokazanog dela stava dobijamo da red (1) konvergira.

Ako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, tada je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ počev od nekog $n_0' \in \mathbb{N}$, pa tvrđenje ponovo sledi iz prvog dela stava. ■

PRIMERI 10.2.3

1° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{3^n}$ konvergira, jer je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2 + (n+1) + 1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n^2+n+1} = \frac{1}{3}.$$

2° Harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ prema primeru 1 divergira, a red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ prema primeru 2.2° konvergira. Za oba reda je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pa se o njihovoj konvergenciji na osnovu Dalamberovog kriterijuma ne može reći ništa. ▲

* J. D'Alembert (1717–1783), francuski matematičar

STAV 10.2.3 *(Košijev kriterijum)*

1° *Ako za red (1) postoje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *i* $q \in \mathbf{R}$, *tako da je* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ *za* $n \geqslant n_0$, *onda on konvergira. Ako postoji* $n_0' \in \mathbf{N}$ *tako da je* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ *za* $n \geqslant n_0'$, *onda red (1) divergira.*

2° *Neka postoji* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. *Za* $l < 1$ *red (1) konvergira, a za* $l > 1$ *on divergira.*

Dokaz.

1° Iz nejednakosti $a_{n_0+k} \leqslant q^{n_0+k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, i konvergencije reda $\sum_{k=0}^{\infty} q^{n_0+k}$ sledi konvergencija reda (1). Ako je pak $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ za $n \geqslant n_0'$, onda je $a_n \geqslant 1$, $n \geqslant n_0'$, pa red (1) divergira.

2° Neka je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$. Izaberimo ε, $0 < \varepsilon < 1 - l$. Postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je $\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon = q < 1$ za $n \geqslant n_0$. Na osnovu 1° sledi da red (1) konvergira.

Ako je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$, tada je $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ počev od nekog $n_0' \in \mathbf{N}$, pa ponovo primenjujući 1° zaključujemo da red (1) divergira. ■

PRIMERI 10.2.4

1° Red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ konvergira jer je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{2}$.

2° Slično kao u primeru 3 pokazuje se da u slučaju da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, ne možemo ništa reći o konvergenciji reda (1) na osnovu Košijevog kriterijuma. ▲

STAV 10.2.4 *(Kumerov* kriterijum)*

Neka je $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *niz pozitivnih brojeva, takav da red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ *divergira. Označimo* $K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$, *gde su* a_n, $n \in \mathbf{N}$, *članovi reda (1).*

1° *Ako postoje* $\delta > 0$ *i* $n_0 \in \mathbf{N}$, *tako da je* $K_n \geqslant \delta$ *za* $n \geqslant n_0$, *onda red (1) konvergira. Ako postoji* $n_0' \in \mathbf{N}$ *tako da je* $K_n \leqslant 0$ *za* $n \geqslant n_0'$, *onda red (1) divergira.*

2° *Neka postoji* $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. *Ako je* $K > 0$, *red (1) konvergira, a ako je* $K < 0$, *onda on divergira.*

Dokaz.

1° Neka je $K_n \geqslant \delta > 0$ za $n \geqslant n_0$. Na osnovu stava 1.1 možemo pretpostaviti da je $n_0 = 1$. Odavde

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geqslant \delta a_{n+1},$$

odnosno

$$a_n c_n - a_{n+1} c_{n+1} > 0,$$

ili

$$a_n c_n > a_{n+1} c_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

* E. E. Kummer (1810–1893), nemački matematičar

Odavde sledi da je niz $(a_n c_n)_{n=1}^{\infty}$ strogo opadajući, a red $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n - a_{n+1} c_{n+1})$ konvergira, jer njegov niz parcijalnih suma $(a_1 c_1 - a_{n+1} c_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ je ograničen i monoton. Prema ovome i red $\sum_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$ konvergira, pa konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ako je $K_n \leqslant 0$ za $n \in \mathbf{N}$, onda je

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0,$$

ili

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ divergira, to i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira (teorema 3).

2° Neka je $\lim_{n\to\infty} K_n = K > 0$. Postoje δ, $0 < \delta < K$, i $n_0 \in \mathbf{N}$, tako da

$$n > n_0 \implies K_n > \delta.$$

Na osnovu 1°, red (1) konvergira.

Ako je $\lim_{n\to\infty} K_n < 0$, onda postoji $n_0' \in \mathbf{N}$, tako da je $K_n \leqslant 0$ za $n \geqslant n_0'$. Ponovo primenjujući 1° dobijamo da red (1) divergira. ■

PRIMERI 10.2.5

1° Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dati red s pozitivnim članovima. U stavu 4 stavimo $c_n = 1$. Dobija se Dalamberov kriterijum.

2° Za dati red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ stavimo u stavu 4 $c_n = n$. Tada se dobija

$$K_n = n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1).$$

Dakle:

(a) Ako, počevši od nekog n, važi nejednakost $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1$, odnosno $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1$, onda red (1) konvergira, odnosno divergira. (b) Ako je $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$, onda red (1) konvergira, odnosni divergira, za $r > 1$, odnosno $r < 1$ *(Rabeov* kriterijum)*.

3° Pretpostavimo da se odnos $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ članova reda (1) može napisati u obliku

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{\alpha}},$$

* J. L. Raabe (1801–1859), švajcarski matematičar

gde su λ, μ i $\alpha > 1$ konstante, a (θ_n) je ograničen niz. Tada:

(a) Za $\lambda > 1$ (odnosno $\lambda < 1$) red (1) konvergira (odn. divergira). Ovo sledi iz Dalamberovog kriterijuma, s obzirom da je tada $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda$, tj. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$.

(b) Za $\lambda = 1$, $\mu > 1$ (odn. $\lambda = 1$, $\mu < 1$) red (1) konvergira (odn. divergira). Ovo tvrđenje sledi iz Rabeovog kriterijuma, s obzirom da je u ovom slučaju

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu.$$

(c) Za $\lambda = 1$, $\mu = 1$ red (1) divergira. Naime, u Kumerovom kriterijumu stavimo $c_n = n \ln n$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ divergira (primer 2.3°) i pri tom je

$$\begin{aligned} K_n &= n \ln n \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^\alpha}\right) - (n+1)\ln(n+1) \\ &= (n+1)\ln n + \frac{\theta_n \ln n}{n^{\alpha-1}} - (n+1)\ln(n+1) \\ &= \frac{\theta_n \ln n}{n^{\alpha-1}} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

odakle je $\lim_{n\to\infty} K_n = \ln \frac{1}{e} = -1$.

Kriterijum opisan u ovom primeru zove se *Gausov* kriterijum.* ▲

STAV 10.2.5 *(Integralni kriterijum)*

Neka je $f(x)$ neprekidna, nenegativna i opadajuća realna funkcija za $x \geqslant 1$ i neka je $a_n = f(n)$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Dokaz.

Označimo $\varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, $x \geqslant 1$. Tada je $\varphi'(x) = f(x) \geqslant 0$ za $x \geqslant 1$, pa funkcija φ raste. Ako integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergira, onda postoji konačan $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = K$, a ako taj integral divergira, onda je $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. U prvom slučaju konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(n+1) - \varphi(n)), \tag{3}$$

a u drugom on divergira.

Funkcija $\varphi(x)$ zadovoljava uslove Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti na segmentu $[n, n+1]$, $n \in \mathbf{N}$, pa važi jednakost

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = f(n+\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

* C. F. Gauss (1777–1855), nemački matematičar

Zbog monotonosti funkcije $f(x)$ imamo nejednakosti

$$a_{n+1} \leqslant \varphi(n+1) - \varphi(n) \leqslant a_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dakle, ako red (3) konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$; ako red (3) divergira, onda divergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Primetimo da se zaključak ovog stava ne menja ako funkcija f zadovoljava date uslove samo za $x > n_0$, gde je $n_0 \in \mathbf{N}$ proizvoljno.

PRIMERI 10.2.6

1° Posmatrajmo red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. Na osnovu primera 8.6.2, integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergira ako i samo ako je $\alpha > 1$. Isti zaključak važi i za dati red.

2° Red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+\alpha} n}$, $\alpha > 0$, konvergira. Naime, funkcija $f(x) = \frac{1}{x \ln^{1+\alpha} x}$ zadovoljava uslove stava 5 za $x \geqslant 2$, a integral $\int_2^\infty f(x)\,dx$ konvergira.

3° Funkcija $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln\ln x}$ zadovoljava uslove stava 5 za $x \geqslant 3$, a nesvojstveni integral $\int_3^\infty f(x)\,dx$ divergira. Prema tome, red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln\ln n}$ divergira.

4° Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln\ln x)^{1+\alpha}}$, $\alpha > 0$, je $\varphi(x) = \int_3^x f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(\ln\ln 3)^\alpha} - \frac{1}{(\ln\ln x)^\alpha}\right]$, pa, kako je $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \frac{1}{\alpha(\ln\ln 3)^\alpha}$ konačan broj, to konvergira integral $\int_3^\infty f(x)\,dx$, a sa njim i red

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0. \quad ▲$$

10.3. REDOVI S PROIZVOLJNIM ČLANOVIMA

Neka je dat realni red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots. \tag{1}$$

STAV 10.3.1

Ako red

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \tag{2}$$

konvergira, onda konvergira i red (1).

Dokaz.
Sledi iz teoreme 1.1 i nejednakosti

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|. \quad \blacksquare$$

Ako red (2) konvergira, onda se kaže da red (1) *apsolutno konvergira*. Za red (1) kaže se da *uslovno konvergira* ako konvergira, ali pri tom ne konvergira apsolutno (kasnije ćemo dati primer takvog reda).

Posmatrajmo sada jednu posebnu vrstu realnih redova.

Red

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n+1}c_n + \cdots,$$

gde su realni brojevi c_n, $n \in \mathbf{N}$, svi istog znaka, naziva se *alternativnim redom*.

STAV 10.3.2 *(Lajbnicov kriterijum)*
Ako je $c_{n+1} \leqslant c_n$, $n \in \mathbf{N}$, *i* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, *onda alternativni red* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$ *konvergira.*

Dokaz.
Parcijalne sume s_{2n} datog reda napišimo u obliku

$$s_{2n} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2n-1} - c_{2n}),$$

odakle se vidi da niz $(s_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ raste. Iz jednakosti

$$s_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n}$$

sledi da je, za sve $n \in \mathbf{N}$, $s_{2n} < c_1$, tj. da je niz $(s_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ ograničen. Prema tome, postoji $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$.

Iz jednakosti $s_{2n+1} = s_{2n} + c_{2n+1}$ sledi da je i $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$. Zato je i $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. $\blacksquare$

PRIMERI 10.3.1

1° Red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergira prema Lajbnicovom kriterijumu. Kako harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergira, to dati red konvergira uslovno.

2° Kako red $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{1+\alpha}n}$, $\alpha > 0$, konvergira, to red $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^{1+\alpha}n}$ konvergira apsolutno. $\blacktriangle$

Svojstva realnih redova

Posmatrajmo proizvoljne realne redove. Ispitajmo da li se neka svojstva konačnih zbirova prenose na takve redove.

STAV 10.3.3
Konvergentan red ima svojstvo asocijativnosti.

Dokaz.
Dokazati ovaj stav znači dokazati da konvergentan red (1) ima isti zbir kao i red čiji su članovi

$$a_1 + \cdots + a_{n_1}, \quad a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}, \quad \ldots, \quad a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}, \quad \ldots,$$

gde je $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ strogo rastući niz prirodnih brojeva. No, niz parcijalnih suma reda $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k})$, $n_0 = 1$, jeste podniz $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ niza $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Prema tome je $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = \lim_{n\to\infty} s_n$. $\blacksquare$

Primetimo da se grupisanjem članova nekog divergentnog reda može dobiti konvergentan red. Na primer, red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ je divergentan, dok red

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots,$$

dobijen od datog reda grupisanjem članova, ima zbir jednak nuli. Za red s pozitivnim članovima, međutim, tako nešto nije moguće. To je posledica činjenice da je kod takvog reda niz parcijalnih suma monoton.

STAV 10.3.4
Apsolutno konvergentan red ima svojstvo komutativnosti.

Dokaz.
Neka je red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ apsolutno konvergentan i neka je red

$$\sum_{k=1}^{\infty}a'_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k + \cdots$$

dobijen od datog reda premeštanjem članova. Drugim rečima, neka je

$$a'_1 = a_{n_1}, \quad a'_2 = a_{n_2}, \quad \ldots, \quad a'_k = a_{n_k}, \quad \ldots,$$

gde je $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ neka permutacija skupa $\mathbf{N}$ prirodnih brojeva. Dokažimo da red $\sum_{k=1}^{\infty}a'_k$ konvergira i ima isti zbir kao i dati red.

Pretpostavimo najpre da je $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ označimo sa s_n, a reda $\sum_{k=1}^{\infty}a'_k$ sa s'_k; neka je $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Ako je, za neko $k \in \mathbf{N}$,

$$\max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = n_0,$$

onda je $s'_k \leqslant s_{n_0}$, odakle sledi $s'_k \leqslant s$ za proizvoljno $k \in \mathbf{N}$. Dakle, niz $(s'_k)_{k\in\mathbf{N}}$ je rastući i ograničen, pa postoji $\lim_{k\to\infty} s'_k = s'$. Pri tom je $s' \leqslant s$. Kako se red

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ može dobiti iz reda $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ premeštanjem članova, to je i $s \leqslant s'$. Dakle je $s = s'$.

Pretpostavimo sada da su članovi reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ proizvoljni realni brojevi. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s^*$. Nenegativne članove datog reda označimo sa a_k^+, a negativne sa $-a_m^-$. Pri tom u nizovima $(a_k^+)_k$, odnosno $(a_m^-)_m$, članovi imaju isti poredak kao odgovarajući članovi niza $(a_n)_n$. Možemo da pretpostavimo da su oba ta niza beskonačna, jer se u protivnom tvrđenje lako svodi na već ispitani slučaj. Parcijalne sume redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ i $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^-$ označimo sa $\sum_{i=1}^{k} a_i^+ = s_k^+$, $\sum_{j=1}^{m} a_j^- = s_m^-$. Jasno je da je za svako $k, m \in \mathbf{N}$ ispunjeno $s_k^+ \leqslant s^*$ i $s_m^- \leqslant s^*$, pa su pomenuti redovi konvergentni — označimo $\lim_{k\to\infty} s_k^+ = s^+$, $\lim_{m\to\infty} s_m^- = s^-$.

Neka je, kao obično, s_n n-ta parcijalna suma datog reda. Za svako $n \in \mathbf{N}$ postoje $k, m \in \mathbf{N}$, takvi da je $s_k^+ - s_m^- = s_n$ $(n = k+m)$. Prelaskom na limes kada $n \to \infty$ (a time i $k, m \to \infty$) dobijamo

$$s^+ - s^- = s.$$

Sada je još dovoljno primetiti da izmena mesta članova reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne menja zbirove s^+ i s^-, jer su to sume redova s pozitivnim članovima. ■

Primetimo da u slučaju uslovno konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ i $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^-$ iz dokaza prethodnog stava divergiraju. Naime, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, pa je $\lim_{m+k\to\infty}(s_k^+ + s_m^-) = \infty$. Kako je $\lim_{m+k\to\infty}(s_k^+ - s_m^-) = s$, to mora biti $\lim_{k\to\infty} s_k^+ = \lim_{m\to\infty} s_m^- = \infty$. S druge strane, zbog konvergencije datog reda imamo $\lim_{k\to\infty} a_k^+ = \lim_{m\to\infty} a_m^- = 0$.

Stav 10.3.5 (Riman)

Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uslovno konvergira, onda se za svako $A \in \overline{\mathbf{R}}$ može premeštanjem članova datog reda dobiti red čiji zbir iznosi A.

Dokaz.

Neka je, određenosti radi, A konačan pozitivan broj. Izaberimo brojeve $k_1, k_2, \ldots$ i $m_1, m_2, \ldots$ $(k_1 < k_2 < \cdots, m_1 < m_2 < \cdots)$ kao najmanje brojeve za koje važe nejednakosti (koristimo oznake kao u dokazu stava 4):

$$\begin{aligned} s_{k_1}^+ &> A, & s_{k_1}^+ - s_{m_1}^- &< A, \\ s_{k_2}^+ - s_{m_1}^- &> A, & s_{k_2}^+ - s_{m_2}^- &< A, \\ s_{k_3}^+ - s_{m_2}^- &> A, & s_{k_3}^+ - s_{m_3}^- &< A, \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \end{aligned}$$

Egzistencija ovakvih brojeva je posledica divergencije redova $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^-$. Formirajmo red

$$a_1^+ + \cdots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{m_1}^- + a_{k_1+1}^+ + \cdots + a_{k_2}^+ - a_{m_1+1}^- - \cdots - a_{m_2}^- + a_{k_2+1}^+ \cdots .$$

Nije teško pokazati da ovaj red ima zbir A.

Ako je $A = \infty$, onda će formiranje divergentnog reda slediti niz nejednakosti

$$\begin{aligned} s_{k_1}^+ &> 2, & s_{k_1}^+ - s_{m_1}^- &< 1, \\ s_{k_2}^+ - s_{m_1}^- &> 4, & s_{k_2}^+ - s_{m_2}^- &< 3, \\ s_{k_3}^+ - s_{m_2}^- &> 6, & s_{k_3}^+ - s_{m_3}^- &< 5, \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \end{aligned}$$ ■

Množenje redova

Posmatrajmo realne redove (1) i

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots . \tag{3}$$

Formirajmo beskonačnu matricu

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \ldots & a_ib_1 & \ldots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \ldots & a_ib_2 & \ldots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \ldots & a_ib_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_1b_j & a_2b_j & a_3b_j & \ldots & a_ib_j & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \tag{4}$$

čiji su elementi proizvodi članova redova (1) i (3). Od elemenata ove matrice mogu se formirati razni redovi. Da li ovako formirani redovi imaju jednake ili različite zbirove (ako ih uopšte imaju)? U jednom slučaju ćemo dati odgovor.

Stav 10.3.6 (Koši)

Ako redovi (1) i (3) apsolutno konvergiraju, onda red sastavljen od elemenata matrice (4), uzetih u proizvoljnom poretku, takođe apsolutno konvergira. Pri tom je suma dobijenog reda jednaka proizvodu suma redova (1) i (3).

Dokaz.

Označimo

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= s'_n \quad (n \in \mathbf{N}), & \lim_{n\to\infty} s'_n &= s', \\ b_1 + b_2 + \cdots + b_n &= s''_n \quad (n \in \mathbf{N}), & \lim_{n\to\infty} s''_n &= s'', \\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \bar{s}', & \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| &= \bar{s}''. \end{aligned}$$

Uočimo proizvoljan red čiji su članovi elementi matrice (4),

$$(5)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} a_{i_p}b_{j_p} = a_{i_1}b_{j_1} + a_{i_2}b_{j_2} + \cdots + a_{i_p}b_{j_p} + \cdots .$$

Ovaj red apsolutno konvergira. Naime, neka je

$$|a_{i_1}b_{j_1}| + |a_{i_2}b_{j_2}| + \cdots + |a_{i_p}b_{j_p}| = s_p^*$$

p-ta parcijalna suma reda $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{i_p}b_{j_p}|$. Sa n_0 označimo

$$n_0 = \max\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p\}.$$

Tada je

$$s_p^* \leqslant (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}|)(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_{n_0}|) \leqslant \tilde{s}'\tilde{s}''.$$

Dakle, parcijalne sume reda $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{i_p}b_{j_p}|$ su ograničene, pa on konvergira. Odavde sledi da red (5) apsolutno konvergira. Prema tome, redosled sabiranja elemenata matrice (4) ne utiče na zbir dobijenog reda. Da bismo odredili taj zbir, napišimo ga u obliku

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1)$$
$$+ \cdots + (a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_1) + \cdots .$$

Parcijalne sume ovog reda (računajući svaki izraz u zagradi kao jedan član) možemo pisati u obliku:

$$s_1's_1'', \quad s_2's_2'', \quad s_3's_3'', \quad \ldots, \quad s_n's_n'', \quad \ldots .$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} s_n's_n'' = s's''$, to je $\sum_{p=1}^{\infty} a_{i_p}b_{j_p} = s's''$. ■

U opštem slučaju može se dogoditi da za proizvod uslovno konvergentnih redova (1) i (3) ne važi zaključak stava 6, tj. može se dogoditi da red (5) ne konvergira ili da njegova suma zavisi od poretka članova (v. zadatak 18). Najčešće se pod proizvodom redova $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ podrazumeva red

$$(6)\qquad a_0b_0 + (a_1b_0 + a_1b_0) + \cdots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_0b_n) + \cdots$$

sa opštim članom $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$. Dakle,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k.$$

Ovakvo množenje redova obično se naziva Košijevim množenjem, a razlog što je ono najčešće u upotrebi je u vezi sa njegovom primenom na stepene redove (v. udžbenik Matematička analiza II).

PRIMER 10.3.2

Izmnožimo redove $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$. Oni su apsolutno konvergentni, pa se njihov proizvod može računati, na primer, u obliku (6):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

gde je

$$c_0 = 1, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0,$$

to je

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1.$$

Uzimajući u obzir da je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (v. zadatak 3.17), zaključujemo da je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$. ▲

10.4. REDOVI VEKTORA

Posmatrajmo niz $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ vektora $a^n = (a_1^n, a_2^n, \ldots, a_k^n) \in \mathbf{R}^k$. Izraz

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^n = a^1 + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$$

ćemo nazivati *redom vektora* (u prostoru $\mathbf{R}^k$). Parcijalne sume tog reda definišu se jednakostima:

$$s^1 = a^1,$$
$$s^2 = a^1 + a^2,$$
$$\ldots\ldots$$
$$s^n = a^1 + a^2 + \cdots + a^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

DEFINICIJA 10.4.1

Red (1) konvergira i ima zbir $s \in \mathbf{R}^k$ ako je $\lim_{n\to\infty} s^n = s$. U tom slučaju pišemo $s = \sum_{n=1}^{\infty} a^n$.

Konvergencija nizova u prostoru $\mathbf{R}^k$ svodi se, kao što znamo, na konvergenciju po koordinatama, tj.

$$\lim_{n\to\infty} s^n = s \iff \lim_{n\to\infty} s_i^n = s_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

gde je $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$, $s^n = (s_1^n, s_2^n, \ldots, s_k^n)$ (v. primer 9.2.1). Odavde sledi

STAV 10.4.1
Red $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ *konvergira ako i samo ako konvergiraju redovi*

$$a_1^1 + a_1^2 + \cdots + a_1^n + \cdots,$$
$$a_2^1 + a_2^2 + \cdots + a_2^n + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_k^1 + a_k^2 + \cdots + a_k^n + \cdots. \quad \blacksquare$$

Koristeći ovaj stav, kao i stav 1.1 i teoremu 1.1, dokazuju se sledeća svojstva redova vektora.

STAV 10.4.2
Red (1) konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$, *tako da je*

$$\left\| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a^n \right\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

STAV 10.4.3
Red (1) konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$, *tako da*

$$n > n_0, p \in \mathbf{N} \Longrightarrow \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} a^i \right\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Zajedno s redom (1) posmatrajmo i realan red s pozitivnim članovima

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a^n\| = \|a^1\| + \|a^2\| + \cdots + \|a^n\| + \cdots. \tag{2}$$

Ako konvergira red (2), kaže se da red (1) *apsolutno konvergira.*

STAV 10.4.4
Svaki apsolutno konvergentan red vektora u $\mathbf{R}^k$ *konvergira.*

Dokaz.
Pretpostavimo da red (2) konvergira. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Prema teoremi 1.1 postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da

$$n > n_0, p \in \mathbf{N} \Longrightarrow \sum_{i=n+1}^{n+p} \|a^i\| < \varepsilon.$$

S druge strane je

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} a^i \right\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+p} \|a^i\| < \varepsilon,$$

odakle, prema stavu 3, sledi da red (1) konvergira. ■

Primetimo da se stav 3, a sa njim i stav 4, bitno oslanja na kompletnost prostora $\mathbf{R}^k$.

Za red $\sum_{n=1}^{\infty}(a^n + b^n)$ kažemo da je zbir redova $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ ($a^n, b^n \in \mathbf{R}^k$, $n \in \mathbf{N}$). Na osnovu stavova 1 i 1.2 neposredno sledi da važi

STAV 10.4.5
Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ *vektora prostora* $\mathbf{R}^k$ *konvergiraju, a* α *i* β *su realni brojevi, onda i red* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a^n + \beta b^n)$ *konvergira i pri tom važi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a^n + \beta b^n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a^n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b^n. \quad \blacksquare$$

Za konvergenciju u običnom smislu, ne obavezno apsolutnu, navešćemo dva kriterijuma. Pre toga dokazaćemo jednu lemu.

LEMA 10.4.1
Neka je $(\alpha_i)_{i=1}^m$ *monoton niz realnih brojeva i neka su* $b^1, b^2, \ldots, b^m$ *vektori prostora* $\mathbf{R}^k$, *takvi da su sume* $B^i = b^1 + b^2 + \cdots + b^i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *po normi ograničene,*

$$\|B^i\| \leqslant K, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

za neko $K \in \mathbf{R}$. *Tada je suma* $S = \alpha_1 b^1 + \alpha_2 b^2 + \cdots + \alpha_m b^m$ *ograničena po normi brojem* $K(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|)$.

Dokaz.
Stavljajući $b^1 = B^1$, $b^2 = B^2 - B^1$, $\ldots$, $b^m = B^m - B^{m-1}$ u izraz $S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b^i$ dobijamo

$$S = (\alpha_1 - \alpha_2)B^1 + (\alpha_2 - \alpha_3)B^2 + \cdots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m)B^{m-1} + \alpha_m B^m.$$

Kako su svi brojevi $\alpha_i - \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, istog znaka i $\|B^i\| \leqslant K$, $i = 1, 2, \ldots, m$, to je

$$\|S\| \leqslant K\left|\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i - \alpha_{i+1})\right| + K|\alpha_m| \leqslant K(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|). \quad \blacksquare$$

STAV 10.4.6 *(Abelov kriterijum)*
Neka je niz $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *realnih brojeva monoton i ograničen i neka red vektora* $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ *konvergira. Tada i red* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b^n$ *konvergira.*

Dokaz.

Neka je $|\alpha_n| \leqslant K$, $n \in \mathbf{N}$, i $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Odredimo $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da

$$n > n_0, p \in \mathbf{N} \implies \|b^{n+1} + b^{n+2} + \cdots + b^{n+p}\| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Tada je

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i b^i \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K}(|\alpha_1| + 2|\alpha_m|) \leqslant \varepsilon.$$

Na osnovu stava 3 sledi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b^n$. ■

STAV 10.4.7 *(Dirihleov kriterijum)*

Neka su parcijalne sume reda vektora $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ *po normi ograničene, a neka je* $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton niz u* $\mathbf{R}$ *i* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. *Tada je red* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b^n$ *konvergentan.*

Dokaz.

Označimo parcijalne sume reda $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ sa $s^n = \sum_{i=1}^{n} b^i$. Po pretpostavci postoji $K \in \mathbf{R}$ tako da je $\|s^n\| \leqslant K$, $n \in \mathbf{N}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Odredimo $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da

$$n > n_0, p \in \mathbf{N} \implies \|b^{n+1} + b^{n+2} + \cdots + b^{n+p}\| = \|s^{n+p} - s^n\| \leqslant 2K$$

i da

$$n > n_0 \implies |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{6K}.$$

Tada za $n > n_0$ i $p \in \mathbf{N}$ važi

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} \alpha_i b^i \right\| \leqslant 2K\left(\frac{\varepsilon}{6K} + \frac{2\varepsilon}{6K}\right) = \varepsilon. \quad ■$$

PRIMERI 10.4.1

1° Neka je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ realan monoton niz i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pokažimo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ konvergira za $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$ (za $x = 2m\pi$ on očigledno konvergira).

Zaista, važi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \sin ix\right| = \left|\frac{\cos(x/2) - \cos(n + (1/2))x}{2\sin(x/2)}\right| \leqslant \frac{2}{2|\sin(x/2)|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|},$$

pa dati red konvergira prema stavu 7.

2° Red

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$$

konvergira prema stavu 6. Naime, napišimo $\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}$ u obliku

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) = (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Tada dati red dobija oblik

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Niz $\left(\cos\dfrac{\pi}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ je ograničen i monoton, a red $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$ konvergira prema Lajbnicovom kriterijumu. ▲

10.5. BESKONAČNI PROIZVODI

Neka je $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ niz realnih brojeva. Formalan izraz

$$\prod_{n=1}^{\infty} = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots \tag{1}$$

zove se *beskonačan proizvod* sa opštim članom p_n. Proizvod

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

prvih n članova tog proizvoda je *n-ti parcijalni proizvod*. Ako postoji, konačan i *različit od nule*, limes $P = \lim_{n\to\infty} P_n$, kaže se da beskonačan proizvod (1) *konvergira*; broj P je vrednost tog proizvoda; pri tom se piše

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Ako $\lim_{n\to\infty} P_n$ ne postoji ili je jednak 0 ili ∞, kažemo da proizvod (1) *divergira*.

PRIMERI 10.5.1

1° Beskonačan proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ divergira, jer je $P_n = n + 1$, $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$.

2° Za beskonačan proizvod $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ imamo $P_n = \dfrac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$, pa proizvod divergira.

3° Proizvod $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ napišimo u obliku $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, odakle se dobija $P_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{n}$ i $\lim_{n\to\infty} P_n = \dfrac{1}{2}$. Dakle, ovaj proizvod konvergira i ima vrednost $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$. ▲

Svojstva beskonačnog proizvoda

Posmatrajmo proizvode čiji su članovi različiti od nule. Ako je $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ dat i m fiksiran prirodan broj, onda parcijalne proizvode beskonačnog proizvoda $\prod_{i=m+1}^{\infty} p_i$ označimo sa $P'_k = p_{m+1}p_{m+2}\cdots p_{m+k}$. Očito je $P_{m+k} = P_m P'_k$, gde su P_i parcijalni proizvodi proizvoda $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$. Zato je

$$\lim_{k\to\infty} P_{m+k} = P_m \cdot \lim_{k\to\infty} P'_k.$$

Dakle, važi

STAV 10.5.1

Izostavljanje konačno mnogo članova beskonačnog proizvoda ne utiče na njegovu konvergenciju. ■

STAV 10.5.2

Potreban uslov da proizvod (1) konvergira je da njegov opšti član p_n teži jedinici kad $n \to \infty$.

Dokaz.

Neka je $\lim_{n\to\infty} P_n = P$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} P_n}{\lim_{n\to\infty} P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1. \quad \blacksquare$$

Primetimo da iz ovog stava sledi da su skoro svi članovi konvergentnog beskonačnog proizvoda pozitivni.

Navedimo još Košijev kriterijum za beskonačan proizvod.

TEOREMA 10.5.1

Proizvod (1) konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da

$$n > n_0,\ k \in \mathbf{N} \implies |p_{n+1}p_{n+2}\cdots p_{n+k} - 1| < \varepsilon. \tag{2}$$

Dokaz.

Neka proizvod (1) konvergira. Tada je $\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, pa postoji $n'_0 \in \mathbf{N}$ tako da

$$n > n'_0 \implies |P_n| \geqslant K > 0,$$

za neko K. S druge strane, postoji $n''_0 \in \mathbf{N}$ tako da

$$n > n''_0,\ k \in \mathbf{N} \implies |P_{n+k} - P_n| < K\varepsilon.$$

Dakle, za $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$ važi

$$n > n_0,\ k \in \mathbf{N} \implies |P_n||p_{n+1}p_{n+2}\cdots p_{n+k} - 1| < K\varepsilon,$$

tj.

$$n > n_0,\ k \in \mathbf{N} \implies |p_{n+1}p_{n+2}\cdots p_{n+k} - 1| < \varepsilon.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je uslov (2) ispunjen. Stavljajući $\varepsilon = 1/2$ dobijamo da postoji $n_0 \in \mathbf{N}$, takav da

$$k \in \mathbf{N} \implies |p_{n_0+1}p_{n_0+2}\cdots p_{n_0+k} - 1| < \frac{1}{2},$$

odakle

$$k \in \mathbf{N} \implies \frac{1}{2} < p_{n_0+1}p_{n_0+2}\cdots p_{n_0+k} < \frac{3}{2}.$$

Označimo k-ti parcijalni proizvod beskonačnog proizvoda $\prod_{k=1}^{\infty} p_{n_0+k}$ sa $P'_k = p_{n_0+1}p_{n_0+2}\cdots p_{n_0+k}$. Prema uslovu (2), za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $N_0 \geqslant n_0$ tako da

$$n > N_0,\ k \in \mathbf{N} \implies |p_{n+1}p_{n+2}\cdots p_{n+k} - 1| < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

tj.

$$n > N_0,\ k \in \mathbf{N} \implies \left|\frac{P'_{n+k}}{P'_n} - 1\right| < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

što daje

$$|P'_{n+k} - P'_n| < \varepsilon \quad \text{za} \quad n > N_0, k \in \mathbf{N}.$$

Dakle, niz $(P'_n)_{n=1}^{\infty}$, prema opštem Košijevom kriterijumu, konvergira. Iz stava 1 sledi da i proizvod (1) konvergira. ■

Beskonačni proizvodi i redovi

Konvergencija beskonačnih proizvoda može se dovesti u vezu sa konvergencijom redova. Imajući u vidu stavove 1 i 2, ubuduće ćemo posmatrati proizvode čiji su članovi pozitivni.

TEOREMA 10.5.2

Beskonačan proizvod (1) sa pozitivnim članovima konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$. Ako taj red ima zbir s, onda proizvod (1) ima vrednost e^s.

Dokaz.

Parcijalne sume reda imaju oblik $s_n = \sum_{i=1}^{n} \ln p_i$, a parcijalni proizvodi oblik $P_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$. Očito je $\ln P_n = s_n$, odakle sledi tvrđenje teoreme (podsećamo da se beskonačan proizvod ne smatra konvergentnim ako je $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$). ■

Često se članovi proizvoda $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ pišu u obliku $p_n = 1 + a_n$, $a_n > -1$, a sam proizvod kao

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n). \tag{3}$$

STAV 10.5.3

Neka su realni brojevi a_n, počev od nekog n, svi istog znaka. Tada proizvod (3) konvergira ako i samo ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Dokaz.

Bez ograničenja opštosti može se pretpostaviti $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Prema teoremi 2, proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergira ako i samo konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$. Iz teoreme 2.2 sledi da red $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ konvergira ako i samo red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira, jer je $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$. ■

PRIMER 10.5.2

Proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$, konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leqslant 1$. Naime, dati proizvod konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$, odakle na osnovu primera 2.6.1° sledi zaključak. ▲

U opštem slučaju (kad su brojevi a_n promenljivog znaka), tvrđenje stava 3 ne važi (v. zadatak 13). Međutim, ako zajedno sa redom $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, onda konvergira i proizvod (3). Dokaz prepuštamo čitaocu.

Za proizvod (3) kaže se da *apsolutno konvergira* ako konvergira proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$.

STAV 10.5.4

Ako proizvod (3) apsolutno konvergira, onda on konvergira.

Dokaz.

Sledi iz Košijevog kriterijuma (teorema 1) i nejednakosti

$$|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1| \leqslant (1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|)\cdots(1+|a_{n+k}|)-1. \quad ■$$

ZADACI

1. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n \geqslant 0$, konvergira, onda konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$. Dokazati.

2. Ako redovi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ i $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ konvergiraju, onda konvergiraju i redovi $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$. Dokazati.

3. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ apsolutno konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konvergira, onda konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$. Dokazati.

4. Neka je $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$. Da li red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira? Razmotriti primer $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right]$.

5. Red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ uslovno konvergira. Označimo $s_n' = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+a_i)$, $s_n'' = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|a_i|-a_i)$. Pokazati da je $\lim_{n\to\infty}\dfrac{s_n'}{s_n''}=1$.

6. Naći zbir reda $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

7. Beskonačan proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ apsolutno konvergira ako i samo ako apsolutno konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Dokazati.

8. Na osnovu zadatka 3.22 pokazati:

1° Ako se za neki red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sa pozitivnim članovima može ustanoviti konvergencija (ili divergencija) na osnovu Dalamberovog kriterijuma u graničnom obliku (stav 2.2.2°), onda se ona može ustanoviti i pomoću Košijevog kriterijuma u graničnom obliku (stav 2.3.2°).

2° Postoji red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sa pozitivnim članovima čija se konvergencija može dokazati pomoću stava 2.3.2°, a ne može pomoću stava 2.2.2°.

9. Dokazati sledeće varijante Dalamberovog i Košijevog kriterijuma:

1° Ako je $\overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, $a_n > 0$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira.

2° Neka je $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$, $a_n \geqslant 0$. Tada za $q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira, a za $q > 1$ divergira.

10. Označimo sa r_n ostatak alternativnog reda $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}c_n$, $c_n > 0$, kod kojeg je $c_{n+1} \leqslant c_n$, $n \in \mathbf{N}$. Dokazati da je $|r_n| \leqslant c_n$ za svako n.

11. Pokazati da se od reda $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ sa (konačnom) sumom S sledećom permutacijom sabiraka:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots$$

dobija red čiji je zbir $S/2$.

12. Dokazati da red $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ apsolutno konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$. Označimo njegovu sumu sa $\exp x$. Dokazati da je $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$ za sve $x, y \in \mathbf{R}$.

13. Dokazati da beskonačni proizvod $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right]$ (a) apsolutno konvergira za $x > 1$; (b) uslovno konvergira za $1/2 < x \leqslant 1$; (c) divergira za $0 < x \leqslant 1/2$ (mada u tom slučaju konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$).

14. Koristeći poznate vrednosti integrala $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx$ i $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx$ ($n \in \mathbf{N}$), dokazati sledeću *Valisovu* formulu* koja daje razlaganje broja π u

* J. Wallis (1616–1703), engleski matematičar

beskonačan proizvod:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots$$

15. Primerom pokazati da kod redova sa članovima promenljivog znaka iz $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$ i konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ne sledi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

16. 1° Neka je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ niz pozitivnih realnih brojeva. Ako za $n \to \infty$ važi $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, tada je $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ za proizvoljno malo $\varepsilon > 0$; specijalno, za $p > 0$ važi $a_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$.

2° Dokazati da alternativni red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n > 0$, konvergira ako je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$ za neko $p > 0$.

17. Izvesti Lajbnicov kriterijum iz Dirihleovog.

18. Pokazati da je kvadrat (u Košijevom smislu) uslovno konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ divergentan red.

19. 1° Dokazati nejednakosti Heldera i Minkovskog za redove:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_ib_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{1/q}, \qquad a_i, b_i \in \mathbf{R},\ p > 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{1/p}, \qquad a_i, b_i \in \mathbf{R},\ p \geqslant 1.$$

2° Dokazati da u skupu l^p svih realnih nizova $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, takvih da red $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p$ konvergira $(p \geqslant 1)$, funkcija

$$d(a,b) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n - b_n|^p\right)^{1/p}, \qquad a = (a_n),\ b = (b_n) \in l^p,$$

jeste metrika.

3° Dokazati da u tako definisanom metričkom prostoru l^p konvergencija nizova povlači konvergenciju odgovarajućih nizova koordinata, ali da obrnuto nije tačno.

4° Dokazati da je u metričkom prostoru l^p jedinična kugla $K[0,1]$, gde je $0 = (0,0,\ldots)$, ograničen i zatvoren skup koji nije kompaktan.

20. Dokazati da funkcija

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n-y_n|}, \qquad x = (x_n),\ y = (y_n),$$

definiše metriku u skupu s svih realnih nizova.

INDEKS POJMOVA

Adherencija 233
Aksioma
  algebarska 22
  Dedekindova 46
  neprekidnosti (potpunosti) 22
Apsolutna vrednost
  kompleksnog broja 44
  realnog broja 25
Area funkcije 119
Argument
  funkcije 14
  kompleksnog broja 78
Arhimedovo svojstvo 30
Asimptota 153
  horizontalna 153
  kosa 153
  vertikalna 153
Astroida 90

Bernulijeva lemniskata 78
Beskonačno mala višeg reda 84
Beskonačno velika višeg reda 84
Bijekcija 15
Broj
  algebarski 47
  ceo 28
  iracionalan 29
  kardinalni 38
  kompleksan 43
  prirodan 26
  racionalan 28
  realan 21
  transcendentan 47
Brojna osa 34
Brzina 110

C 43
Ceo deo realnog broja 31
Cikloida 90
  produžena 207

Decimalna reprezentacija 33
Dekompozicija skupa 19
Deljenje 24
Diferencijal 123
  višeg reda 128
Dijametar skupa 255
Domen 14
Dužina (luka) krive 208

e 59
Ekstenzija 14
Ekstremum 129
ε-okolina 34

Familija skupova 17
Formula
  binomna 45
  Boneova 201
  Lajbnicova 127
  Maklorenova 141
  Njutn-Lajbnicova 195
  Tejlorova 138
  Valisova 284
Funkcija 13
  beskonačno mala 68
  bijektivna 15
  deo-po-deo glatka 196
  deo-po-deo neprekidna 96
  diferencijabilna 111
  Dirihleova 64
  eksponencijalna 71

elementarna 106
glatka 196
identička 16
injektivna 15
integrabilna 177
inverzna 15
inverzna hiperbolička 119
inverzna trigonometrijska 77
karakteristična 20
(strogo) konkavna 149
(strogo) konveksna 149
logaritamska 72
monotona 64
neparna 63
neprekidna na skupu 96, 247
neprekidna po promenljivoj 246
neprekidna sleva (zdesna) 95
neprekidna u tački 91, 245
ograničena 65
ograničena odozgo (odozdo) 65
(strogo) opadajuća 64
osnovna elementarna 106
parametarski zadata 63
parna 63
periodična 64
podintegralna 160, 177
primitivna 159
(strogo) rastuća 64
ravnomerno (uniformno) neprekidna 99, 252
realna, realne promenljive 63
Rimanova 106
složena 16
stepena 73
surjektivna 15
trigonometrijska 74
više promenljivih 237
Funkcije
ekvivalentne 85
istog reda 84

Glavna vrednost integrala 224
Grafik 14
Granica skupa 256
Granična vrednost
desna 66
funkcije u metričkom prostoru 236
leva 66
niza realnih brojeva 48
niza u metričkom prostoru 235
realne funkcije 65
uzastopna 237
Grupa
Abelova 22

i 43
Infimum 13, 30
Injekcija 15
Imaginarni deo 43
Integracija
parcijalna 163, 197
Integral
apsolutno konvergentan 220
binomnog diferencijala 175
divergentan 215
donji i gornji Darbuov 181
eliptički 173
eliptički u Ležandrovom obliku 174
konvergentan 215
neodređeni 160
nesvojstveni 215
pseudoeliptički 174
Rimanov (određeni) 177
sa promenljivom gornjom granicom 194
uslovno konvergentan 222
Integrand 160, 177
Intenzitet vektora 227
Interval 34
Invarijantnost forme diferencijala 123
Izomorfizam 23
Izvod 108
beskonačan 122
desni i levi 121
drugi 125
logaritamski 121
viši 125

Keplerova jednačina 107
Klase ekvivalencije 12
Kodomen 14
Kompleksna ravan 44
Kolekcija skupova 17
Kompozicija
funkcija 16
relacija 19
Kongruencija po modulu 18
Kontinuum-hipoteza 42
Kontrakcija 241
Konjugovano kompleksan broj 43
Košijev problem 243
Koren realnog broja 32
Kosinus hiperbolički 116
Kotangens hiperbolički 116
Kriterijum
Abel-Dirihleov za integrale 222
Abelov za redove 278
Dalamberov 265
Dirihleov za redove 279
Gausov 269
integralni 269
Košijev koreni za redove 266
Košijev za beskonačne proizvode 281
Kumerov 267
Lajbnicov 271
opšti Košijev za redove 261
Rabeov 268
upoređivanja 263
Kriva 207
prosta 207
zatvorena 207
Krivolinijski trapez 176
Kugla
otvorena 229
zatvorena 229

Lema
Bolcano-Vajerštrasova 37
Borel-Lebegova 38
Limes
desni 66
donji (inferior) 55
funkcije u metričkom prostoru 236
gornji (superior) 55
levi 66
niza realnih brojeva 48
niza u metričkom prostoru 235
realne funkcije 65
uzastopni 237
Lipšicov uslov 107
Logaritam 72
prirodni 72

Majoranta 12
Maksimum 13
lokalni 129
strogi lokalni 129
Merljiva figura 203
Metod sukcesivnih aproksimacija 241
Metrika 227
ekvivalentna 256
Minimum 13
lokalni 129
strogi lokalni 129
Minoranta 13
Množenje 21
Moć
skupa 38
kontinuuma 42
Modul
kompleksnog broja 44, 78
neprekidnosti 102, 259

N 26
Nejednakost
Bernulijeva 45
Helderova 148, 225, 285
Jangova 148
Jensenova 158
Koši-Švarcova 47
Minkovskog 149, 225, 285
trougla 25, 35, 44, 227
Niz 48
beskonačno veliki 60
divergentan 48
konvergentan 48, 234
Košijev 56, 239
monoton 58

(strogo) opadajući 58
(strogo) rastući 58
Norma 227
Nula-niz 50

o 84
O 84
Odsečak 34
Oduzimanje 23
Ojlerova konstanta 88
Okolina
u $\mathbb{R}$ 34
u $\overline{\mathbb{R}}$ 35
u metričkom prostoru 232
Opšti član
beskonačnog proizvoda 280
reda 260
Oscilacija funkcije
na skupu 80
u tački 93, 259
Ostatak
beskonačnog proizvoda 280
Košijev 140
Lagranžov 140
Peanov 140
reda 261
Šlemilh-Rošov 140
u integralnom obliku 199

Parametar podele 176
Period funkcije 64
osnovni 64
Podela 176
finija 176
grublja 176
sa istaknutim tačkama 176
Podniz 52
Pokrivač 37
Polarne koordinate 78
Polarni radijus 77
Polarni ugao 77
Polinom
Maklorenov 144
Tejlorov 139
više promenljivih 247
Polutangenta 122
Polje 22
uređeno 22
Poteg 77
Potpokrivač 37
Potprostor 233
Površina
krivolinijskog trapeza 204
krivolinijskog trougla 206
obrtnog tela 213
ravne figure 203
Pravilo
de Morganovo 10, 18
Lopitalovo 135
Prekid 94
druge vrste 94
otklonjiv 94
prve vrste 94
Princip
Košijev za realne funkcije 79
Košijev za realne nizove 57
matematičke indukcije 26
umetnutih odsečaka 36
Priraštaj funkcije 108
Produženje 14
Proizvod
apsolutno konvergentan 283
beskonačni 280
Dekartov 11
parcijalni 280
Košijev redova 275
skalarni 227
Projekcija 245
Promenljiva 14
integraciona 178
Prostor
diskoneksan (nepovezan) 252
kompletan 239
koneksan (povezan) 252
linearno koneksan (putno povezan) 254
metrički 227
separabilan 256
vektorski 227

Putanja 207
prosta 207
zatvorena 207

Q 28

R 21
$\overline{\mathbb{R}}$ 35
Rad sile 214
Rastojanje 227
skupova 255
u C 44
u R 35
Razlomak
pravi 165
prost 168
Realni deo 43
Red 260
alternativni 270
apsolutno konvergentan 270, 277
divergentan 260
geometrijski 260
harmonijski 263
konvergentan 260, 276
s pozitivnim članovima 263
uslovno konvergentan 270
vektora 276
Rektifikacija 208
Relacija 11
deljivosti 28
ekvivalencije 11
identička 19
inverzna 19
poretka 12
trougla 25, 35, 44, 227
Restrikcija 14

Sabiranje 21
Sečica 110
Segment 34
Sfera 229
Simetrična razlika 18
Singularitet 215
Sinus hiperbolički 116
Skup 9
gust 31, 256
indeksa 17
induktivan 26
količnički 12
kompaktan 248
konveksan 254
mere nula 186
najviše prebrojiv 39
ograničen 13, 231
ograničen odozdo (odozgo) 13
otvoren 231
partitivni 11
prazan 10
prebrojiv 39
simetričan 63
svuda gust 256
univerzalni 10
uređen 12
zatvoren 231
Skupovi
ekvivalentni 38
Slika skupa 15
inverzna 15
Smena
druga Ojlerova 175
promenljive kod neodređenog integrala 162
promenljive kod određenog integrala 201
prva Ojlerova 171
treća Ojlerova 171
Spirala
Arhimedova 78
hiperbolička 90
logaritamska 90
Sredina reda s 158
Stav
Fermaov 130
Košijev za množenje redova 274
Pikarov 243
Rimanov za redove 273
Suma
Darbuova (gornja i donja) 179
integralna 176
parcijalna 260
Supremum 13, 30

Surjekcija 15
Suženje 14

Tačka
  adherentna 233
  granična 232
  izolovana 91, 233
  nepokretna 240
  prekida 94
  prevojna 152
  spoljašnja 232
  stacionarna 131
  unutrašnja 232
Tačka nagomilavanja
  niza realnih brojeva 53
  niza u metričkom prostoru 236
  skupa u metričkom prostoru 233
  skupa u R 37
Tangens hiperbolički 116
Tangenta 110
Teorema
  Banahova o nepokretnoj tački 240
  Bolcano-Košijeva o međuvrednosti 97
  Bolcano-Vajerštrasova za nizove 54
  Darbuova 134
  Darbuova za integrale 182
  druga o srednjoj vrednosti integrala 200
  Kantorova o ravnomernoj neprekidnosti 100, 252
  Košijeva o nizovima 61
  Košijeva o srednjoj vrednosti 134
  Lagranžova 131
  o srednjoj vrednosti diferencijalnog računa 132
  o supremumu 29
  osnovna algebre 43
  prva o srednjoj vrednosti integrala 193
  Rolova 130
  Štolcova 61
  Vajerštrasova o neprekidnim funkcijama 97
Trigonometrijski oblik kompleksnog broja 78

Unutrašnjost skupa 256
Uređeni par 10

Z 28
Zapremina obrtnog tela 212
Zbir
  integralni 176
  parcijalni 260
  reda 260

LITERATURA

1. S. ALJANČIĆ: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd 1968.
2. T. M. APOSTOL: *Calculus I*, Blaisdell Publ. Co., New York 1961.
3. T. M. APOSTOL: *Mathematical Analysis* (2nd ed.), Addison Wesley Publ. Co., London 1974.
4. H. CARTAN: *Calcul différentiel. Formes différentielles*, Hermann, Paris 1967.
5. J. DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York 1960.
6. B. R. GELBAUM, J. M. H. OLMSTED: *Counterexamples in Analysis*, Holden Day, San Francisco 1964.
7. J. L. KELLEY: *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Princeton, New Jersey 1957
8. K. KNOPP: *Theory and Apllication of Infinite Series*, Blackie and Son, London 1951.
9. G. LEFORT: *Algèbre et analyse. Exercises* (2-ème éd.), Dunod, Paris 1964.
10. S. MARDEŠIĆ: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, Zagreb, I 1974, II 1977.
11. M. MARJANOVIĆ: *Matematička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd 1979.
12. M. MRŠEVIĆ, Đ. DUGOŠIJA: *Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I*, Građevinska knjiga, Beograd 1978.
13. G. PÓLYA, G. SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (4. Aufl.), Springer, Berlin-Heidelberg, I 1970, II 1971.
14. W. RUDIN: *Principles of Mathematical Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill Co., New York 1964.
15. W. RUDIN: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Co., New York 1966.
16. L. SCHWARTZ: *Analyse mathématiques I, II*, Hermann, Paris 1967.
17. M. SPIVAK: *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, New York 1965.
18. E. C. TITCHMARSH: *The Theory of Functions* (2nd ed.), Oxford Univ. Press, Oxford 1939.
19. M. ZAMANSKY: *Introduction a l'algèbre et l'analyse modernes* (2-ème éd.), Dunod, Paris 1963.
20. Г. Н. БЕРМАН: *Сборник задач по курсу математического анализа* (15-ое изд.), Наука, Москва 1967.
21. Б. П. ДЕМИДОВИЧ: *Сборник задач и упражнений по математическому анализу* (5-ое изд.), Гос. изд. физ-мат. лит., Москва 1963.
22. В. А. ЗОРИЧ: *Математический анализ*, Наука, Москва, I 1981, II 1984.
23. В. А. ИЛЬИН, Э. Г. ПОЗНЯК: *Основы математического анализа*, Наука, Москва, I 1971, II 1980.

24. В. А. ИЛЬИН, В. А. САДОВНИЧИЙ, БЛ. Х. СЕНДОВ: *Математический анализ*, I, Наука, Москва 1979; II, Изд. Московского Унив., Москва 1987.
25. Л. Д. КУДРЯВЦЕВ: *Курс математического анализа I, II*, Высшая школа, Москва 1981.
26. Р. КУРАНТ: *Курс диференцијалног и интегралног рачуна* I, II (пр. са енгл.), Београд
27. И. И. ЛЯШКО, А. К. БОЯРЧУК, Я. Г. ГАЙ, Г. П. ГОЛОВАЧ: *Справочное пособие по математическому анализу*, Вища школа, Киев, I 1977, II 1979.
28. С. М. НИКОЛЬСКИЙ: *Курс математического анализа* I, II, Наука, Москва 1973.
29. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ: *Курс дифференциального и интегрального исчисления* I–III (7-ое изд.), Наука, Москва 1969.
30. Г. Е. ШИЛОВ: *Математический анализ. Функции одного переменного*, Наука, Москва, 1–2. 1969, 3. 1970.
31. Г. Е. ШИЛОВ: *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных*, Наука, Москва 1972.